

Квантовые и прецизионные измерения

Конспект лекций для студентов 3-его курса (6-ой семестр)

Кафедра колебаний физического факультета МГУ

В. Б. Брагинский и С. П. Вятчанин

11 апреля 2003 г.

Оглавление

1	Тепловые шумы при измерении координаты	3
1.1	Теорема Найквиста	3
1.2	Минимальная обнаружимая сила	5
1.3	Динамическое влияние прибора	6
1.4	Ошибка измерения	8
1.5	Обратное флуктуационное влияние (back action)	9
2	Квантовые измерения	11
2.1	Соотношения неопределенностей Гейзенберга	11
2.1.1	Свойства фотона	11
2.1.2	Микроскоп Гейзенберга	12
2.1.3	Квантовый измеритель скорости	14
2.1.4	Свойства квантового измерения	14
2.2	Стандартный квантовый предел	15
2.2.1	Два измерения координаты	15
2.2.2	Условия "квантовости"	17
2.2.3	3 измерения координаты	17
2.3	Квантовые измерения	19
2.3.1	Схема подеромоторного измерителя энергии.	19
2.4	Квантовые невозмущающие измерения.	20
2.4.1	Пондеромоторный измеритель э.м. энергии \mathcal{E} с доплер-измерителем скорости фон-Неймана.	21
2.4.2	Измеритель энергии с использованием квадратичной нелинейности	21
2.4.3	КНИ квадратурной компоненты	22
2.5	Квантовое вариационное измерение	24
2.5.1	Простейший оптический датчик.	25
3	Задачи	28
A	Описание случайных процессов	29

Предисловие

Ниже представлена часть конспекта курса лекций "Квантовые и прецизионные измерения", читаемого проф. С. П. Вятчаниным для студентов 3-ого курса кафедры физики колебаний физфака МГУ по методическим материалам проф. В. Б. Брагинского, который в свое время и создал этот курс.

Сразу оговоримся, что эти конспекты — предварительная и пока неполная версия и авторы будут благодарны за все критические замечания по лекциям, которые можно передавать лично (комн. 3-30 физфака) или по электронной почте (vyat@hbar.phys.msu.su).

Авторы глубоко благодарны за ценные замечания проф. Ф. Я. Халили, взявшего на себя труд критически прочитать конспект лекций.

Глава 1

Тепловые шумы при измерении координаты

1.1 Теорема Найквиста

Формула Найквиста (1928) утверждает, что наличие диссипация в системе является источником флуктуационной силы. Формула Найквиста является частным случаем флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ)[1].

Для механической системы (в частности, для мех. осциллятора) формула Найквиста дает выражение для спектральной плотности случайной силы, действующей на механическую систему:

$$S_F(f) = 4k_B T \eta \left[\frac{\text{дин}^2}{\text{Гц}} \right] \quad (1.1)$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана, T — температура, η — коэффициент вязкости (сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = -\eta v$, v — скорость). (См. рис.1.1 слева.) Суть этой формулы — диссипации является источником флуктуаций.

Формула (1.1) означает, что дисперсия случайной силы, усредненной за время τ равна

$$\Delta F^2 = 4k_B T \eta \Delta f \simeq \frac{4k_B T \eta}{\tau} \quad (1.2)$$

Покажем это на простом примере: пусть одна из стенок сосуда с газом является подвижной (рис. 1.2, справа). Рассчитаем силу F_0 , действующую на стенку площади S за счет отражения от нее молекул (масса каждой m , нормальная к стенке компонента скорости v , концентрация

n):

$$F_0 = \frac{2mv}{\tau} N \frac{1}{2} = \frac{mv}{\tau} n S v \tau = n m v^2 S \quad (1.3)$$

Здесь $N/2$ — среднее число частиц, ударившееся о стенку за время τ . Если стенка движется со скоростью u , то действующая на нее сила другая, и ее добавок можно рассматривать как силу вязкости:

$$F = n m (v - u)^2 S \simeq F_0 - 2 n m v u S = \quad (1.4)$$

$$= F_0 - \underbrace{\frac{F_0}{2v}}_H u. \quad (1.5)$$

Число частиц, падающих на стенку подчиняется распределению Пуассона ($N/2 \pm \sqrt{N/2}$). Поэтому мы можем рассчитать флуктуационную компоненту силы:

$$\Delta F = \frac{2mv}{\tau} \sqrt{\frac{N}{2}} = \sqrt{\frac{2m^2 v^3 n S}{\tau}} = \quad (1.6)$$

$$= \sqrt{\frac{4mv^2 \eta}{\tau}} = \sqrt{\frac{4k_B T \eta}{\tau}} \quad (1.7)$$

В последнем равенстве мы использовали теорему о равномерном распределении:

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{k_B T}{2}$$

Для электрической системы (в частности, для LC-контра) формула Найквиста дает

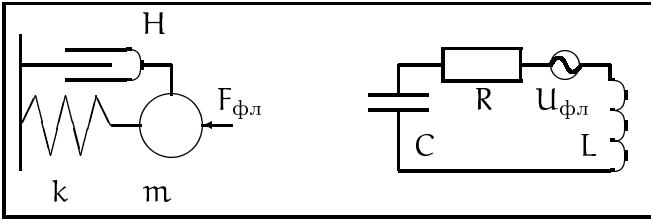


Рис. 1.1: Наличие диссипации является источником флуктуаций. Слева: механический осциллятор — вязкое трение является источником флуктуационной силы. Справа: LC-контур — сопротивление является источником флуктуационного напряжения.

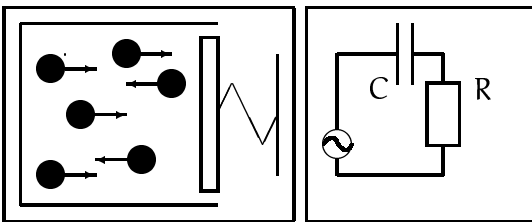


Рис. 1.2: Слева: Механическая модель для демонстрации формулы (1.2). Справа: RC цепочка для ”вывода” формулы Найквиста для электрической цепи.

выражение для спектральной плотности случайного напряжения, вырабатываемого генератором, включенным последовательно с сопротивлением R (см. рис.1.1 справа):

$$S_U(f) = 4k_B TR \left[\frac{B^2}{\Gamma_{\Pi}} \right] \quad (1.8)$$

Формула (1.8) может быть ”выведена” исходя только из того, что $S_U(f)$ не зависит от частоты. Рассмотрим схему на рис. 1.2 (справа). Рассчитаем спектральную плотность флуктуаций напряжения на емкости и, проинтегрировав ее, найдем полную дисперсию по формуле Винера-Хинчина (см. Приложение А):

$$U_C(\omega) = \frac{U_{fl}}{R + 1/(i\omega RC)} \times \frac{1}{i\omega C},$$

$$S_{U_C}(\omega) = \frac{S_U}{1 + (\omega RC)^2},$$

$$\Delta U_C^2 = \int_0^\infty \frac{S_U}{1 + (\omega RC)^2} \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \frac{S_U}{2\pi RC} \int_0^\infty \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{S_U}{4RC},$$

$$\frac{\Delta U_C^2}{2} = \frac{k_B T}{2} \rightarrow S_U = 4k_B TR.$$

Обобщение на квантовый случай. Подчеркнем, что спектральная плотность Найквистовой силы (или напряжения) постоянна (не зависит от частоты). Однако это так лишь в классическом пределе $k_B T \gg \hbar\omega$. В квантовом случае формула Найквиста обобщается следующим образом для механической и электрической системы соответственно:

$$S_F(\omega) = 4\hbar \left(\frac{k\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) \quad (1.9)$$

$$S_U(\omega) = 4R \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) \quad (1.10)$$

Очевидно, что в пределе $k_B T \gg \hbar\omega$ эти формулы переходят в классические (1.1, 1.8). В квантовом пределе $k_B T \ll \hbar\omega$ имеем

$$S_F(\omega) \simeq 2\hbar k\omega, \quad (1.11)$$

$$S_U(\omega) \simeq 2R\hbar\omega \quad (1.12)$$

1.2 Минимальная обнаруживаемая сила

Зададимся вопросом: какова минимальная сила $F_{\min}(t)$ (действующая на механический осциллятор) может быть обнаружена на фоне тепловых флуктуаций? Здравый смысл подсказывает, что надо измерять координату и только в той полосе частот Δf , где находится основная часть спектра силы. Тогда используя (1.6) получаем условие обнаружения в виде:

$$F_{\min}(t) \geq \sqrt{k_B T_H \Delta f}$$

Например, если сигнальная сила резонансная длительности τ :

$$F(t) = F_0 \cos \omega_m t, \quad 0 < t < \tau, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.13)$$

то $\Delta f \simeq 1/\tau$ и

$$F_0^{\min} \geq \sqrt{\frac{4k_B T_H}{\tau}}, \quad (1.14)$$

$$Q_m = \frac{m\omega}{H}, \quad \tau^* = \frac{2m}{H},$$

$$F_0^{\min} \geq \sqrt{\frac{8mk_B T}{\tau\tau_m^*}} = \sqrt{\frac{4m\omega k_B T}{Q_m \tau}}. \quad (1.15)$$

Здесь мы ввели пока не упоминавшиеся характеристики диссипации: добротность Q_m и время релаксации τ_m^* .

Для уменьшения величины F_0 из формул (1.15) сразу следуют рекомендации:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow 0, \\ \tau &\rightarrow \infty, \\ \tau_m^* &\rightarrow \infty, \\ Q_m &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Воздействие на высокочастотную систему. Подчеркнем, что в этих рекомендациях нет конкретных указаний о процедуре измерения. Например, если по условиям эксперимента время τ ограничено, то может выполняться условие

$$\tau \ll \tau_m^* \quad (1.16)$$

В этом случае сразу не ясно, как и что измерять.

Пусть условие (1.16) выполнено. Мы хотим зарегистрировать воздействие сигнальной силы, наблюдая за амплитудой колебаний координаты. При воздействии силы вида (1.13) на механический осциллятор можно не учитывать диссипацию и тогда легко получить решение для амплитуды координаты x_f ("сигнальный отклик"):

$$x(t) = x_f \sin \omega_m t, \quad \tau^* \gg t > \tau. \quad (1.17)$$

$$x_f \simeq \frac{F_0 \tau}{2m\omega}. \quad (1.18)$$

Теперь нам надо рассчитать, на сколько изменится амплитуда Δx_τ колебаний осциллятора за то же самое время τ под воздействием тепловых шумов. Приведем следующий приближенный, но зато наглядный вывод. Разобьем время τ на интервалы равные половине периода $T_0/2 = \pi/\omega_m$. Тогда каждом таком интервале осциллятор будет получать случайные толчки F_{fl} . Воздействие каждого изменит амплитуду на x_{fl} , которую можно рассчитать как воздействие короткого импульса и потом просуммировать их, как независимые случайные величины. В результате получим [2]:

$$F_{fl} \simeq \sqrt{4k_B T_H \frac{T_0}{2}},$$

$$x_{fl} \simeq \frac{F_{fl}}{m\omega_m} \frac{T_0}{2} = \sqrt{4k_B T_H \frac{T_0}{2m^2\omega_m^2}},$$

$$\Delta x_\tau \simeq x_{fl} \sqrt{N} = x_{fl} \sqrt{\frac{2\tau}{T_0}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_m^2} \cdot \frac{2\tau}{\tau^*}}$$

Очевидно, что условие $x_f > \Delta x_\tau$ будет условием обнаружения силы F . Подставляя, получаем:

$$x_f = \frac{F_0 \tau}{2m\omega} \geq \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_m^2} \cdot \frac{2\tau}{\tau^*}} \quad (1.19)$$

Нетрудно увидеть, что это условие просто совпадает с (1.15). Однако теперь мы имеем еще и *рецепт* измерений — надо регистрировать *изменение амплитуды координаты*.

Мы должны уточнить наше условие: строгий расчет дает, что появляется множитель

$\xi \simeq 2 \dots 3$, зависящий от уровня достоверности α и от значения начальной амплитуды колебаний x_0 :

$$F_0^{\min} \geq \xi(\alpha, x_0) \sqrt{\frac{8 m k_B T}{\tau \tau_m^*}}. \quad (1.20)$$

Приведем типичные значения для ξ :

α	$\xi(\alpha, x_0 = 0)$	$\xi(\alpha, x_0 = \sqrt{\frac{k_B T}{m \omega_m^2}})$
0.05	2.45	1.96
0.01	3.04	2.58

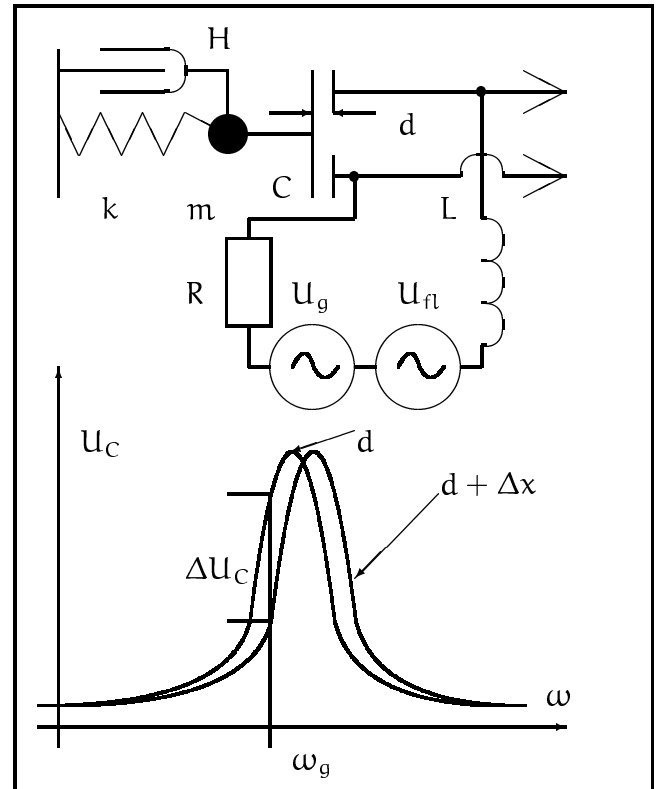


Рис. 1.3: Схема емкостного датчика.

1.3 Динамическое влияние прибора

Подключение датчика смещений к механическому осциллятору может изменить динамические характеристики осциллятора (частоту, затухание). Это называется динамическим влиянием прибора. Мы рассмотрим это влияние на примере емкостного датчика [2].

Принцип работы емкостного датчика.

Схема емкостного датчика представлена на рис. (1.3). Выберем частоту генератора ω_g так, чтобы она попадала на самую крутую часть склона резонансной кривой (задача 3 "Склон резонансной кривой"):

$$\omega_g \simeq \pm \frac{\omega_e}{2Q_e} \quad (1.21)$$

где ω_e — частота, а Q_e — LC-контура. Тогда изменение расстояния d между пластинами на малую величину $\Delta x \ll d$ вызовет изменение

емкости ΔC (а, значит, и резонансной частоты $\Delta\omega_e$) и сдвиг резонансной кривой¹. Это в свою очередь приведет к изменению амплитуды напряжения ΔU_C на емкости, что и может быть зарегистрировано. Очевидно, что чем более добротный контур, тем более крутую зависимость имеет резонансная кривая и тем сильнее изменится напряжение.

Внесение жесткости. Можно показать, что при условии (1.21) малый сдвиг пластин конденсатора на величину $\Delta x \ll d$ приведет к изменению амплитуды ΔU_C колебаний на емкости на величину (задача 4 "Емкостной датчик"):

$$\Delta U_C \simeq \pm \frac{Q_e}{2} \cdot \frac{\Delta x}{d} \cdot U_C \quad (1.22)$$

Здесь знак $(-)$ относится к настройке на левый склон, а $(+)$ — на правый.

Заметим, что формулы (1.21 и 1.22) справедливы лишь *а)* при небольших смещениях

$$\Delta x \ll d/Q_e \quad (1.23)$$

и *б)* при медленных смещениях

$$\partial_t d \ll d/\tau_e^* \quad (1.24)$$

где $\tau_e^* = Q_e/2\omega_e$ — время релаксации контура (задача 5 "Условие работы емкостного датчика"). Ниже будем считать, что эти условия выполнены.

Но при таком выборе частоты генератора изменение расстояния между пластинами вызовет также и изменение кулоновской (пондеромоторной) силы F притяжения между пластинами, а это означает внесение дополнительной жесткости $K_{\text{доп}}$ в механический осциллятор. Рассчитаем ее (здесь опять знак $(-)$ относится к настройке на левый склон, а $(+)$ — на правый):

$$F = \frac{\epsilon_0 S U_C^2}{2d^2}, \quad F = F_0 + \Delta F,$$

¹Резонансная кривая — зависимость амплитуды вынужденных колебаний напряжения (например, на емкости) от частоты.

$$\Delta F \simeq \pm \frac{\epsilon_0 S U_C \Delta U_C}{d^2}, \quad U_C = \frac{Q_e U_g}{\sqrt{2}},$$

$$\Delta F \simeq \pm \frac{\epsilon_0 S Q_e^3 U_g^2}{4d^3} \cdot \Delta x,$$

$$K_{\text{доп}} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \pm \frac{\epsilon_0 S Q_e^3 U_g^2}{4d^3}$$

Здесь S — площадь пластин.

Внесение затухания. Заметим, однако, что наш вывод основывался на приближенных формулах, которые справедливы только при достаточно медленных движениях пластин. Конечно, сила притяжения при изменении Δx изменяется не мгновенно, а с запаздыванием — сила притяжения "отстает" от смещения на время τ_e^* релаксации контура (задача 6 "Скачок"). Напомним, что условие (1.24) означает, что координата Δx *мало* изменяется за время τ_e^* . Тогда уравнение для координаты x механического осциллятора будет содержать добавочный член:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + N\dot{x}(t) + Kx(t) + K_{\text{доп}} \underbrace{x(t - \tau_e^*)}_{\simeq x(t) - \tau_e^* \dot{x}(t)} &= \\ &= \sum F, \\ m\ddot{x}(t) + (N - K_{\text{доп}}\tau_e^*)\dot{x}(t) + (K + K_{\text{доп}})x(t) &= \\ &= \sum F. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Суммируем: включение емкостного датчика приводит к внесению жесткости и затухания

$$K_{\text{доп}} = \pm \frac{\epsilon_0 S Q_e^3 U_g^2}{4d^3}, \quad (1.26)$$

$$N_{\text{доп}} = -K_{\text{доп}}\tau_e^* = \mp \frac{\epsilon_0 S Q_e^4 U_g^2}{2d^3 \omega_e} \quad (1.27)$$

Причем на левом склоне вносится отрицательная жесткость и положительное затухание, на правом — положительная жесткость и отрицательное затухание.

Заметим, что динамическое влияние может быть отнюдь не малым. Для приведенных ниже численных значений величин (отнюдь не

рекордных)

$$\begin{aligned} m &= 0.1 \text{ м}, & \omega_m &= 6 \cdot 10^3, \text{ с}^{-1}, & Q_m &= 10^6; \\ Q_e &= 10^3, & \omega_e &= 6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}, \\ S &= 10^{-2} \text{ м}^2, & U &= 1 \text{ В}, & d &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

Мы получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{|K_{\text{доп}}|}{K} &\simeq 0.05, \\ \frac{|H_{\text{доп}}|}{H} &\simeq 9.8 \times 10^3 (!) \end{aligned}$$

Видим, что изменение жесткости механического осциллятора незначительно, но внесенное затухание огромно!

Подчеркнем, что динамическое влияние прибора *полностью предсказуемо*, а значит, может быть либо исключено, либо корректно учтено. Поэтому динамическое влияние прибора *не* накладывает принципиальных ограничений на точность измерений.

1.4 Ошибка измерения

Любой прибор позволяет измерять физическую величину с некоторой ошибкой измерения. Рассмотрим, с какой предельной точностью может измерять координату емкостной датчик [2].

Предположим, что генератор напряжения идеален, т.е. флуктуации в генераторе пренебрежимо малы. Тогда принципиально неустранимыми шумами будут тепловые шумы в контуре. Спектральную плотность S_{U_C} шумов амплитуды напряжения на контуре можно найти, не принимая во внимание движение пластин:

$$\begin{aligned} L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{q(t)}{C} &= U_{\text{шум}}(t), \\ U_C(t) = \frac{q(t)}{C}, & U_C(\omega) = \frac{q(\omega)}{C}, \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, & Q_e = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ U_C(\omega) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{i\omega}{\omega_0 Q_e} \right) &= U_{\text{шум}}(\omega), \\ S_{U_C} \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q_e} \right)^2 \right\} &= 4k_B TR, \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \pm \frac{1}{2Q_e} &\Rightarrow \\ S_{U_C} = 2k_B TR Q_e^2. & \quad (1.28) \end{aligned}$$

Напомним, что режим работы емкостного датчика таков, что он успевает "отработать" изменение механической координаты, т.е.

$$\omega_m \tau_e^* \ll 1.$$

На частотном языке это означает, что в полосе

$$\omega \in \omega_g \pm \omega_m$$

спектральную плотность S_{U_C} можно считать постоянной. Значит, сигнал ΔU_C (1.22) наблюдается на фоне практически белых шумов и условие обнаружения будет иметь вид:

$$\Delta U_C > \sqrt{S_{U_C} \Delta f}, \quad \Delta f \simeq \frac{1}{\tau}, \quad (1.29)$$

$$(1.22, 1.29) \Rightarrow \Delta x > \xi x_{\min},$$

$$x_{\min} \simeq \xi \frac{2d}{U_C} \sqrt{\frac{2k_B TR}{\tau}} \quad (1.30)$$

Здесь τ — время наблюдения, $U_C = Q_e U_g / 2$ — амплитуда напряжения на емкости, ξ — множитель немного больший единицы, зависящий от уровня достоверности.

Перепишем условие (1.30) в несколько других обозначениях, вводя мощность W выделяемую в контуре (на сопротивлении R):

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{\omega_g^2 (C U_c)^2 R}{2} \simeq \simeq \frac{\omega_e^2 (C U_c)^2 R}{2}, \quad (1.31)$$

$$\frac{x_{\min}}{d} = 2\xi \sqrt{\frac{2k_B T R}{U_C^2 \tau}} \stackrel{(1.31)}{=} 2\xi \sqrt{\frac{2k_B T R \cdot \omega_e^2 C^2 R}{2W\tau}},$$

$$\frac{x_{\min}}{d} = \frac{2\xi}{Q_e} \sqrt{\frac{k_B T}{\mathcal{E}}}, \quad \mathcal{E} = W\tau. \quad (1.32)$$

Здесь \mathcal{E} — энергия, поглощенная в контуре. Ее можно также назвать "использованной" энергией.

Таким образом мы получили второе (после (1.19)) ограничение на минимально различимое механическое смещение. Оба эти ограничения связаны с фундаментальными шумами: первое (1.19) — с тепловыми шумами в механическом осцилляторе, второе (1.30 или 1.32) — с тепловыми шумами в электрическом контуре емкостного датчика.

1.5 Обратное флуктуационное влияние (back action)

Предположим, что тепловые шумы в механическом осцилляторе ничтожно малы ($H \rightarrow 0$ или $T_{\text{мех}} \rightarrow 0$) и основные шумы создает сам емкостной датчик. Измерительный шум датчика мы рассмотрели в предыдущем разделе. Кроме этого сам датчик создает дополнительный шум обратного флуктуационного влияния (back action noise), который неконтролируемым образом возмущает поведение механического осциллятора [2]. Конкретным механизмом для емкостного датчика являются флуктуации силы $F_{\text{кул}}$ кулоновского притяжения между пластинами:

$$F_{\text{кул}} = \frac{\epsilon_0 S (U_C + U_{C\text{fl}})^2}{2d^2} = \frac{\epsilon_0 S U_C^2}{2d^2} + \underbrace{\frac{\epsilon_0 S U_C U_{C\text{fl}}}{d^2}}_{\delta F_{\text{ба}}} + \dots,$$

$$\delta F_{\text{ба}} = \frac{\epsilon_0 S U_C \sqrt{S U_C \Delta f}}{d^2} = \quad (1.33)$$

$$= \frac{\epsilon_0 S U_C Q_e}{d^2} \times \sqrt{\frac{2k_B T R}{\tau}} \quad (1.34)$$

Подчеркнем, что для осциллятора шумы обратного влияния представляют собой случайную силу, спектр которой практически не зависит от частоты. Важно, что величина этой случайной силы пропорциональна U_C — растет с увеличением "накачки". Вспомним, что измерительные шумы уменьшаются с ростом накачки (см. формулы (1.30, 1.32)). Поэтому должно быть оптимальное значение стационарной амплитуды напряжения U_C^{opt} на емкости, при котором суммарный шум (измерительный и обратного влияния) будет минимален.

Величина этой оптимальной амплитуды будет зависеть от конкретного вида сигнальной силы. Пусть сигнальная сила представляет собой резонансный цуг длительности τ :

$$F_s(t) = F_0 \sin \omega_m t, \quad 0 < t < \tau$$

Тогда можно выписать условия (1.34, 1.30), и получаем:
найти оптимальную величину U_C^{opt} и величину минимально силы F_0^{min} :

$$F_0 > \delta F_{\text{ba}} = \xi \frac{\epsilon_0 S U_C Q_e}{d^2} \sqrt{\frac{2k_B T R}{\tau}}, \quad (1.35)$$

$$\frac{F_0 \tau}{2m\omega_m} > x_{\text{min}} = \xi \frac{2d}{U_C} \sqrt{\frac{2k_B T R}{\tau}}, \quad (1.36)$$

$$C(U_C^{\text{opt}})^2 = \frac{\epsilon_0 S (U_C^{\text{opt}})^2}{d} = \frac{4m\omega_m d^2}{Q_e \tau} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} W^{\text{opt}} &= \frac{C(U_C^{\text{opt}})^2}{2} \frac{\omega_e}{Q_e} = \\ &= \frac{2m\omega_m \omega_e d^2}{Q_e^2 \tau}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} F_0^{\text{min}} &= \xi \sqrt{2} \frac{C Q_e}{d} \sqrt{\frac{4m\omega_m d^2}{C Q_e \tau}} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2k_B T R}{\tau}} = \\ &= \frac{4\xi}{\tau} \sqrt{k_B T R m \omega_m C Q_e} = \\ &= \frac{4\xi}{\tau} \sqrt{\frac{m k_B T \omega_m}{\omega_e}} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Получаем следующие оценки:

$$F_0^{\text{min}} \simeq 3.3 \times 10^{-16} \text{ Н} = 3.3 \times 10^{-9} \text{ дин},$$

$$W^{\text{opt}} \simeq 3 \times 10^{-6} \text{ Вт},$$

$$U_C = 0.075 \text{ В}$$

при комнатной температуре для следующих параметров емкостного датчика и механического осциллятора:

$$\begin{aligned} m &= 0.1 \text{ кг}, \quad \omega_m = 10^2 \text{ с}^{-1}, \quad \tau = 10^3 \text{ с}^{-1} \\ Q_e &= 10^3, \quad \omega_e = 6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}, \\ S &= 10^{-2} \text{ м}^2, \quad d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

Приведенные параметры обычны для физической лаборатории. Для оценки резерва чувствительности используем следующие параметры (МГУ 1965, принцип эквивалентности)

$$\begin{aligned} m &= 10^{-7} \text{ кг}, \quad \omega_m = 10^{-2} \text{ с}^{-1}, \quad \tau = 10^6 \text{ с}^{-1} \\ Q_e &= 10^3, \quad \omega_e = 6 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \\ S &= 10^{-2} \text{ м}^2, \quad d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0^{\text{min}} &\simeq 3.3 \times 10^{-25} \text{ Н} = 3.3 \times 10^{-18} \text{ дин}, \\ W^{\text{opt}} &\simeq 3 \times 10^{-17} \text{ Вт}, \\ U_C &= 2.7 \times 10^{-8} \text{ В} \end{aligned}$$

Глава 2

Квантовые измерения

2.1 Соотношения неопределенностей Гейзенберга

2.1.1 Свойства фотона

После Планка, показавшего, что черное тело излучает и поглощает энергию порциями — фотонами, и Эйнштейна, применившего понятие кванта для объяснения фотоэффекта, физики привыкли приписывать отдельному фотону энергию $\hbar\omega$. После опытов Лебедева, измерившего давление света, физики стали уверенно приписывать фотону энергию \mathcal{E} и импульс \mathcal{P} :

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad \mathcal{P} = \frac{\hbar\omega}{c}$$

Однако при этом пока никто не говорил про размеры фотона. Правда, из опытов по фотоэффекту, где фотон поглощался фактически атомом размера порядка $\sim 10^{-10}$ м, можно было заключить, что "длина" фотона должна быть $L \gg 10^{-10}$ м.

Факт существования квантов как порций энергии легко проверяется (и проверен) на опыте, схема которого изображена на рис. 2.1. При достаточно слабом потоке фотонов на полупропускающее зеркало (коэффициент прозрачности $T = 0,5$) всегда щелкает только один из детекторов, одновременно они не срабатывают. Это означает, что если на зеркало падает только один фотон (для этого и нужен слабый поток света), то он пойдет *либо* на детектор D_1 — *либо* на детектор D_2 . этим опы-

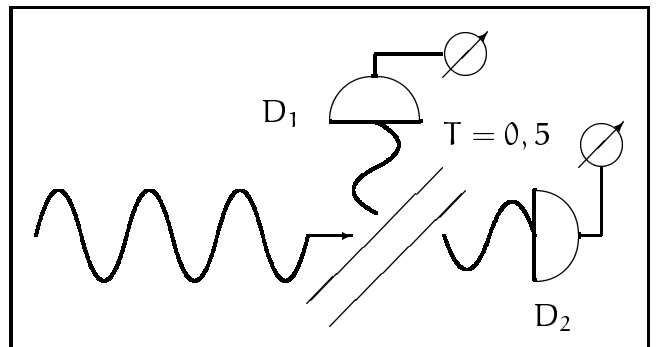


Рис. 2.1: При достаточно слабом потоке фотонов на полупропускающее зеркало всегда щелкает только один детектор.

том подтверждается факт "корпускулярности" света.

Соотношение неопределенности "энергия — время". Если представлять (квазиклассически) порцию э.м. энергии, называемую фотоном, в виде куска синусоиды, то можно легко прийти к заключению (используя просто законы преобразования Фурье), что длительность τ и ширина спектра $\Delta\omega$ связаны очевидным соотношением:

$$\Delta\omega \tau \geq 1$$

Но тогда, коли энергия фотона пропорциональна частоте, получаем

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \hbar \Delta\omega, \\ \Rightarrow \Delta\mathcal{E} \tau &\geq \hbar, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\mathcal{E} = \hbar\omega \pm \frac{\hbar}{2\tau} \quad (2.2)$$

Таким образом можно говорить о "длине" фотона $c\tau$ (c — скорость света). При этом чем

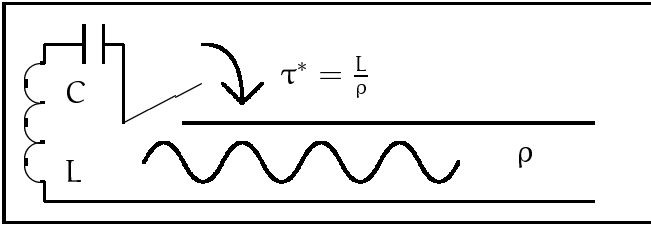


Рис. 2.2: Иллюстрация к мысленному примеру

лучше локализован фотон, тем хуже определена его энергия

Для примера можно представить такой мысленный опыт. В LC-контуре частоты ω_0 первоначально находился один фотон. Мы соединяем этот контур с длинной линией и фотон излучается в нее. Соединение контура с линией можно характеризовать временем релаксации τ^* (так называемое "нагруженное" время релаксации — время, за которое амплитуда колебаний в контуре уменьшается в e раз). Таким образом "длительность" фотона будет $\sim \tau^*$. Следовательно, энергия фотона, излученного в линию будет определяться формулой (2.2) с подстановками $\omega = \omega_0$, $\tau = \tau^*$. Заметим, что первоначально в контуре был *точно* один квант — неопределенность энергии была равна нулю. Спрашивается — откуда взялась неопределенность энергии? Ответ — в момент подключения происходит неконтролируемый обмен энергии, фактически это параметрическое взаимодействие, при котором может быть добовлена или отнята энергия.

По схеме Д. Клышко [3] (рис. 2.3) проведен опыт (Мандель и Хонг) с "локализованными" фотонами. Фотоны от лазера накачки в нелинейном кристалле превращались в пары фотонов (бифотоны), которые были коррелированы — при срабатывании одного из детекторов (D_2) открывались оптические ворота и детектор D_1 регистрировал фотон. Появление одного фотона было строго коррелировано с появлением другого. Можно было двигать один из детекторов вдоль по направлению движения фотона и таким образом определить время корреляции τ фотонов ("длительность" фотона) — в таких опытах время

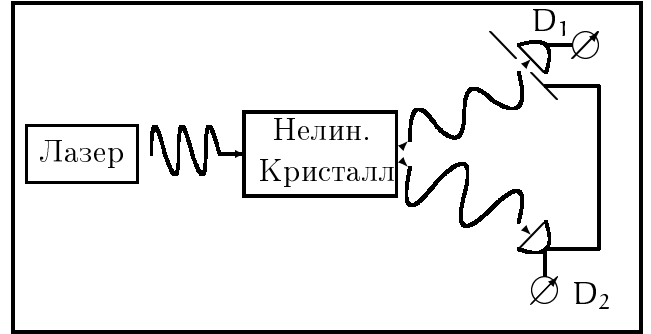


Рис. 2.3: Схема Клышко по рождению бифотонов.

корреляции определяется длиной L кристалла: $\tau \simeq L/c \simeq 10^{-8}$ с.

Соотношение неопределенности "координата — импульс". Используя формулы (2.1, 2.2) можно получить для неопределенности координаты Δx фотона и неопределенности его импульса Δp :

$$P = \frac{\hbar\omega}{c} \Rightarrow \Delta p = \frac{\hbar\Delta\omega}{c}, \quad (2.3)$$

$$\Delta x = \frac{c}{2\tau} \geq \frac{c}{2\Delta\omega}, \quad (2.4)$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.5)$$

Подчеркнем, что это соотношение неопределенностей относится к фотону.

2.1.2 Микроскоп Гейзенберга

Под микроскопом Гейзенберга понимают мысленный опыт по измерению координаты макроскопического тела с помощью рассеяния на нем частиц описываемых квантовомеханически — фотонов или электронов. Вообще таких схем измерений много. Мы рассмотрим одну из них [4].

Дифракция на щели Пусть свет с длиной волны λ падает нормально на щель ширины d , как показано на рис. 2.4. Пока будем считать, что щель закреплена. Свет, как известно, будет дифрагировать с характерным дифракционным углом $\theta \simeq \lambda/d$. Поэтому детекторы,

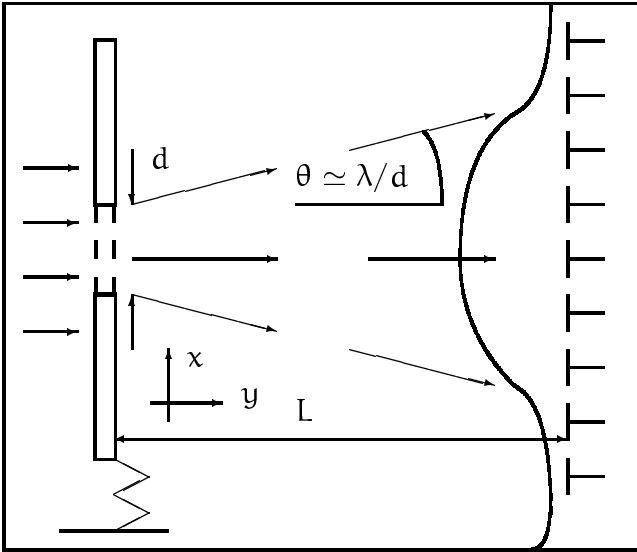


Рис. 2.4: Одна из схем микроскопа Гейзенберга.

расположенные за щелью, зафиксируют свет с распределением, соответствующим этому углу. Пусть теперь мы уменьшили поток света так, что лишь изредка щелкает *только* один детектор. Это значит, что каждый раз рассеивается на щели лишь один фотон. При этом общая статистика фотоотсчетов соответствует классическому распределению интенсивностей. Тогда мы можем заключить, что после пролета неопределенность поперечного импульса каждого фотона равна

$$\Delta p_{\perp} \simeq \frac{\hbar \omega}{c} \theta \simeq \frac{\hbar}{d}$$

(Здесь в последнем равенстве мы "подогнали" численный множитель, но надо помнить, что строгое рассмотрение дает именно этот результат.) В момент пролета через щель неопределенность Δx_{\perp} поперечной координаты фотона очевидно определяется шириной щели:

$$\Delta x_{\perp} \simeq \frac{d}{2}$$

Сравнивая эти две формулы, мы находим, что

$$\Delta p_{\perp} \Delta x_{\perp} \simeq \frac{\hbar}{2} \quad (2.6)$$

Это соотношение неопределенностей внешне совпадает с (2.5), но оно написано для *поперечного* импульса и *поперечной* координаты фотона.

Измерение координаты с помощью микроскопа Гейзенберга. Пусть мы хотим измерить координату щели (это масса механического осциллятора), наблюдая распределение поглощения фотонов по фотодетекторам, прошедших через щель.

Будем считать, что дифракция на щели незначительно изменяет распределение поглощенных фотонов, т.е. плоскость фотодетекторов расположена достаточно близко:

$$L\theta = \frac{Ld}{\lambda} \ll d$$

Тогда по одному поглощенному фотону можно сделать заключение о поперечной координате щели с точностью $\pm d/2$. Если же за время наблюдения прошло много $N \gg 1$ фотонов, то центр распределения поглощенных фотонов (а именно он несет информацию о координате щели) будет известен точнее (это фактически среднее от нескольких измерений с нулевым средним):

$$\Delta x_{\text{изм}} \simeq \frac{d}{2\sqrt{N}} \quad (2.7)$$

Очевидно, что это есть ошибка измерения координаты.

Отметим, что на щель падает плоская волна перпендикулярно плоскости щели — следовательно, поперечный импульс фотонов до щели можно считать нулевым. Мы показали, что *после* прохождения щели фотоны получают случайный поперечный импульс. Из закона сохранения импульса мы должны заключить, что такой же, но противоположно направленный случайный импульс получает щель (масса осциллятора). Тогда случайный импульс, полученный щелью после пролета N фотонов, будет равен:

$$\Delta p_{\text{возм}} \simeq \Delta p_{\perp} \sqrt{N} = \frac{\hbar \sqrt{N}}{d} \quad (2.8)$$

Из (2.7, 2.8) получаем "измерительное" соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x_{\text{изм}} \Delta p_{\text{возм}} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.9)$$

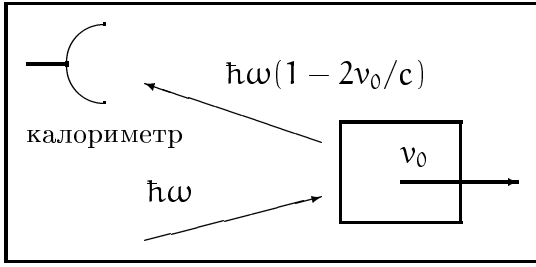


Рис. 2.5: Схема квантового измерения скорости по эффекту Доплера, предложенная фон Нейманом в качестве мысленного эксперимента.

2.1.3 Квантовый измеритель скорости

Фон Нейман предложил квантовую схему измерения скорости пробного тела [5] (см. рис. 2.5), которую мы рассмотрим ниже.

Пусть на пробное тело, движущееся со скоростью v_0 , падает и отражается фотон частоты ω . Тогда из-за эффекта Доплера частота отраженного фотона будет изменена:

$$\omega_{\text{отр}} = \omega \left(1 - \frac{2v_0}{c} \right)$$

Следовательно, также будет и изменена энергия отраженного фотона. Энергию отраженного фотона можно в принципе точно измерить — например, поглотить в детекторе-калориметра.

Мы уже знаем, что фотоны "локализованы" в пространстве и эта локализация связана с их неопределенностью энергии (частоты). Пусть длительность падающего фотона τ , а неопределенность энергии $\hbar\Delta\omega \simeq \hbar/\tau$. Тогда трудно написать ошибке измерения скорости:

$$\hbar\omega \frac{2\Delta v_{\text{изм}}}{c} = \hbar\Delta\omega \Rightarrow \Delta v_{\text{изм}} \simeq \frac{c}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq \frac{c}{2\omega\tau} \quad (2.10)$$

Фотон, отражаясь от пробного тела, передает ему импульс $2\hbar\omega/c$. Однако момент передачи неопределен эта неопределенность порядка τ . Поэтому пробное тело в результате нашего измерения *неконтролируемым* образом

сдвинется, т.е. его координата возмущается на величину

$$\Delta x_{\text{возм}} \simeq \frac{2\hbar\omega}{mc} \tau \quad (2.11)$$

Очевидно, что ошибка измерения скорости (импульса) (2.10) и возмущение координаты (2.11) будут связаны соотношением неопределенностей:

$$\Delta p_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}} = m\Delta v_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}} > \frac{\hbar}{2} \quad (2.12)$$

Заметим, что это почти то же самое соотношение неопределенностей, что и (2.9). Отличие "в индексах": в одной схеме координата измеряется, а импульс возмущается, во второй — наоборот.

2.1.4 Свойства квантового измерения

После вышесказанного можно сформулировать следующие свойства квантового измерения [5, 6, 7, 8].

- 1) В результате квантового измерения всегда происходит извлечение информации о наблюдаемой. Это может быть, например:
 - координата в микроскопе Гейзенберга,
 - импульс доплер-измерителя скорости фон Неймана,
 - энергия и проч.
- 2) В результате квантового измерения происходит возмущение другой наблюдаемой, например:
 - возмущение импульса в микроскопе Гейзенберга;
 - возмущение координаты доплер-измерителя скорости фон Неймана;
 - возмущение фазы при измерении энергии.
- 3) В квантовом измерении всегда присутствует необратимый процесс на макроскопическом уровне. Этот необратимый

процесс связан с так называемой *квантовой считывающей системой* (КСС) — системой, с которой взаимодействует измеряемая система в течение ограниченного времени. Например, в микроскопе Гейзенберга и доплер-измерителе скорости фон Неймана роль КСС играют падающие фотоны: после взаимодействия они уносят информацию о координате или импульсе, которая считывается после их разрушающего измерения (фотон “убивается”).

2.2 Стандартный квантовый предел

Все выше рассмотренные схемы измерений относятся к одному-единственному измерению. Этого обычно недостаточно для практических целей обнаружения внешнего воздействия. Для простоты мы будем рассматривать обнаружение малой классической силы, действующей на механический осциллятор или на свободную массу.

2.2.1 Два измерения координаты

Самый очевидный способ — дважды измерить координату механического осциллятора или свободной массы: до (x_1) и после (x_2) воздействия силы и судить по силе о разности $X = x_2 - x_1$. Пусть длительность воздействия силы равна τ и время между измерениями тоже τ . Будем проводить измерение координаты с помощью прибора типа микроскопа Гейзенберга. Будем считать, что оба измерения проводятся практически мгновенно (т.е. за время $\ll \tau$).

Свободная масса m . Пусть ошибка первого измерения равна Δx_1 . При этом, как мы помним, будет сообщен случайный импульс (импульс обратного влияния, back action по-английски)

$$\Delta p_1 = \frac{\hbar}{2\Delta x_1}.$$

Этот импульс проявится во время второго измерения в виде добавочного возмущения координаты

$$\Delta x_{\text{add}} = \frac{\Delta p_1 \tau}{m} = \frac{\hbar \tau}{2m \Delta x_1}$$

Пусть ошибка второго измерения равна Δx_2 . Тогда ошибка измерения разности X будет складываться из трех частей

$$\begin{aligned} \Delta X^2 &= \Delta(x_2 - x_1)^2 = \\ &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_{\text{add}})^2 = \\ &= (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\hbar \tau}{2m \Delta x_1}\right)^2 + (\Delta x_2)^2 \end{aligned}$$

Из последнего соотношения видно, что для уменьшения общей ошибки ΔX можно беспрепятственно уменьшать ошибку второго измерения $\Delta x_2 \rightarrow 0$. Однако для ошибки первого измерения существует оптимум, при которой общая ошибка минимальна:

$$(\Delta x_{1 \text{ opt}})^2 = \frac{\hbar \tau}{2m}, \quad (2.13)$$

$$\Delta X_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar \tau}{m}} \quad (2.14)$$

Эта минимальная ошибка измерения носит название стандартного квантового предела (СКП), по-английски Standard Quantum Limit (SQL). Под СКП понимается семейство пределов, которые мы ниже рассмотрим. Идея СКП была предложена В. Б. Брагинским в 1967 г. [2, 9], сам термин СКП (SQL) был позже введен К. С. Торном.

Если мы измеряем изменение импульс P за время τ (тем же способом), то нетрудно получить СКП для импульса:

$$P = \frac{m(x_2 - x_1)}{\tau},$$

$$\Delta P_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{m \hbar}{\tau}} \quad (2.15)$$

Если изменение импульса вызвано сигнальной силой $P = F\tau$, то можно получить СКП для силы¹:

$$\Delta F_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{m \hbar}{\tau^3}} \quad (2.16)$$

Механический осциллятор массы m и частоты ω_m . Пусть мы измеряем через четверть периода $\tau = \pi/2\omega_m$. Опять первое измерение с ошибкой Δx_1 будет сопровождаться случайным импульсом обратного влияния

$$\Delta p_1 = \frac{\hbar}{2\Delta x_1}.$$

¹Надо заметить, что случай постоянной силы требует отдельного рассмотрения. В частности при неограниченном времени наблюдения можно сколь угодно точно измерить такую силу (действующую в течение конечного времени). Мы здесь рассматриваем случай, когда времени наблюдения равно времени действия силы.

Этот импульс проявится во время второго измерения в виде добавочного возмущения координаты

$$\Delta x_{\text{add}} = \frac{\Delta p_1 \sin \omega_m \tau}{m\omega_m} = \frac{\hbar}{2m\omega_m \Delta x_1}$$

Ошибка измерения разности X будет складываться из трех частей

$$\begin{aligned} \Delta X^2 &= \Delta(x_2 - x_1)^2 = \\ &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_{\text{add}})^2 = \\ &= (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\hbar}{2m\omega_m \Delta x_1}\right)^2 + (\Delta x_2)^2 \end{aligned}$$

Уменьшать ошибку второго измерения $\Delta x_2 \rightarrow 0$ и находим оптимальную величину ошибки первого измерения:

$$(\Delta x_{1 \text{ opt}})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_m}, \quad (2.17)$$

$$\Delta X_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} \quad (2.18)$$

Для механического осциллятора частоты $\omega_m = 10^3 \text{ s}^{-1}$ и массы $m = 10 \text{ г}$ получаем оценку

$$\Delta X_{\text{СКП}} \simeq 10^{-16} \text{ см}$$

Аналогично нетрудно получить СКП для импульса:

$$P = m\omega_m(x_1 - x_2),$$

$$\Delta P_{\text{СКП}} = \sqrt{m\omega_m \hbar} \quad (2.19)$$

Можно получить СКП для резонансной силы $F_0 \cos \omega_m t$, действующей в течение времени τ :

$$X = \frac{F_0 \tau}{2m\omega_m} \sin \omega_m \tau,$$

$$\Delta F_{\text{СКП}} = \frac{2}{\tau} \sqrt{m\omega_m \hbar} \quad (2.20)$$

В заключение приведем СКП для энергии. Здесь мы имеем в виду следующую задачу: с какой ошибкой можно измерить изменение энергии механического осциллятора по измерению его координаты дважды: в моменты времени $t = 0$ и $t = \pi/2\omega_m$. Считаем, что оба

измерения проводятся с оптимальной ошибкой (2.17).

$$\mathcal{E} = \frac{m\omega_m^2}{2} (x_{t=0}^2 + x_{t=\pi/2\omega_m}^2), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta\mathcal{E}^2} &= m\omega_m^2 \sqrt{x_{t=0}^2 (\Delta x_1)^2 + x_{t=\pi/2\omega_m}^2 (\Delta x_1)^2} \\ &= \sqrt{m\omega_m^2 2\mathcal{E} \frac{\hbar}{2m\omega}}, \end{aligned}$$

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{СКП}} = \sqrt{\hbar\omega_m \mathcal{E}}. \quad (2.22)$$

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{СКП}}}{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_m}{\mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad (2.23)$$

LC контур. Пользуясь электромеханической аналогией

$$\begin{aligned} m &\Leftrightarrow L, \\ k &\Leftrightarrow \frac{1}{C}, \\ x &\Leftrightarrow q, \\ v &\Leftrightarrow I, \\ p = mv &\Leftrightarrow \Phi = LI, \end{aligned}$$

можно сразу получить стандартные пределы для заряда q конденсатора и потока Φ в индуктивности контура, имеющего собственную частоту ω_e :

$$\Delta q_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_e}}, \quad (2.24)$$

$$\Delta\Phi_{\text{СКП}} = \sqrt{\hbar\omega_e L} \quad (2.25)$$

Заряд является обобщенной координатой, а поток — обобщенным импульсом в LC контуре. (конечно, обобщенными координатой и импульсом можно выбрать и другие величины, например, напряжение U на конденсаторе как координату и LI/C как импульс или поток Φ как координату и q как импульс).

2.2.2 Условия ”квантовости”

Рассмотрим вопрос, когда можно считать осциллятор квантовым? (Тогда в качестве предельной ошибки измерения воздействия на него считать СКП.) Сразу подчеркнем, что на первый взгляд очевидное условие $k_B T < \hbar\omega$ в

общем случае *неверно*. — ниже мы это покажем.

Чтобы ответить на этот вопрос надо про- что сравнить формулы (1.19 и 2.18) и выпи- сать условие, когда осциллятор можно считать сать условие, когда осциллятор можно считать квантовым:

$$\Delta x_\tau \simeq \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_m^2} \cdot \frac{2\tau}{\tau^*}} \quad (2.26)$$

$$\Delta X_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{\text{СКП}} &> \Delta x_\tau \Rightarrow \\ \frac{2k_B T\tau}{\omega_m \tau^*} &> \hbar, \quad \frac{k_B T\tau}{Q_m} < \hbar \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для механического осциллятора добротности $Q = 10^9$ (это близко к величине рекордной добротности, достигнутой для механических систем) и времени $\tau = 10^{-3}$ сек получаем, что условие (2.28) выполняется при температуре $T < 3$ К.

Аналогично можно получить условие, когда свободную массу можно считать квантовой:

$$\Delta x_\tau \simeq \sqrt{\frac{k_B T\tau^3}{m\tau^*}} \quad (2.29)$$

$$\Delta X_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{\text{СКП}} &> \Delta x_\tau \Rightarrow \\ \frac{k_B T\tau^2}{\tau^*} &< \hbar. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для свободной массы с временем релаксации $\tau^* \simeq 10^5$ с (это близко к рекордной величине для механических систем) и времени $\tau = 10^{-4}$ сек получаем, что условие (2.31) выполняется при температуре $T < 30$ К.

Мы видим, что в условие ”квантовости” входит не только температура (характеризующая среднюю энергию термостата), но и затухание (связь с термостатом).

2.2.3 3 измерения координаты

Рассмотрение с 2-мя измерениями, приведенное выше, носит предварительный характер, поскольку не учитывает влияния начальных

условий, и приведено нами для введения в проблему. Чтобы понять его ограниченность рассмотрим проблему обнаружения действия постоянной силы (амплитуды F_0 и длительности 2τ) на свободную пробную массу [10].

Проблема начальных условий заключается в том, что *перед* измерением у пробного тела неизвестны начальная координата x_0 и импульс p_0 . Поэтому измеряя разность координат $X = x_2 - x_1$ мы получаем ненужную информацию о начальном импульсе (в величину X входит член $\sim p_0\tau/m$) — это дает дополнительную ошибку. Заметим, что влияние неопределенной начальной координаты исключается. Чтобы исключить влияние начального импульса мы должны предварительно *приготовить* состояние пробной массы так, чтобы ее импульс был достаточно мал. Это усложняет даже мыслимый эксперимент. Чтобы избежать этого, обычно рассматривают схему с тремя измерениями.

В схеме с тремя измерениями мы проведем три короткие измерения x_1, x_2, x_3 координаты в моменты времени $0, \tau, 2\tau$. Выпишем результаты этих измерений:

$$x_1 = x_0 + x_{1\text{изм}}, \quad (2.32)$$

$$x_2 = x_0 + x_{2\text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)}{2m} \cdot \tau + \frac{F_0}{m} \cdot \tau^2, \quad (2.33)$$

$$x_3 = x_0 + x_{3\text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)}{m} \cdot 2\tau + \frac{p_2}{m} \cdot \tau + \frac{F_0}{2m} \cdot 4\tau^2. \quad (2.34)$$

Здесь величины $x_{i\text{изм}}$ описывают ошибку измерения прибора в каждом измерении, а p_i — импульсы обратного влияния при каждом измерении. Более детально: третий член в (2.33 и 2.34) — влияние начального импульса и импульса обратного влияния от первого измерения, четвертый член в (2.34) — влияние импульса обратного влияния от второго измерения, последние члены в (2.33 и 2.34) — смещение вызванное сигнальной силой F_0 (сигнал).

Глядя на выражения (2.32 — 2.34), нетрудно сообразить, что влияние начальных условий

будет полностью исключено, если мы будем измерять величину:

$$\begin{aligned} a &= x_1 - 2x_2 + x_3 = \\ &= x_{1\text{изм}} - 2x_{2\text{изм}} + x_{3\text{изм}} - \left(\frac{2p_2}{m} \cdot \tau + \frac{F_0}{m} \cdot \tau^2 \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Очевидно, что величина a пропорциональна дискретной второй производной.

Глядя на вид (2.35) нетрудно сообразить, что первое и третье измерения можно произвести с абсолютной точностью (т.е. ошибки $\Delta x_{1\text{изм}}, \Delta x_{3\text{изм}} \rightarrow 0$), а величину $\Delta x_{2\text{изм}}$ надо выбрать оптимальной. Тогда для величины минимально обнаружимой силы получаем

$$\Delta x_{2\text{изм}}|_{\text{opt}} = \frac{\hbar\tau}{2m}, \quad (2.36)$$

$$F_{0\text{min}} = 2\sqrt{\frac{m\hbar}{\tau^3}} \quad (2.37)$$

Мы получили ответ совпадающий с (2.16) с точностью до множителя (напомним, что здесь время действия силы равно 2τ).

2.3 Квантовые измерения

Пусть тепловые шумы не ограничивают точности измерений, т.е. условия (2.31, 2.28) выполнены с запасом. Тогда может возникнуть *неправильное* впечатление, что СКП определяет предельную точность, достижимую в квантовых измерениях. Ниже мы покажем, что это не так (!).

Сразу подчеркнем, что СКП справедлив *только* для определенной схемы измерений, а именно — для измерения координаты (в том числе и обобщенной). Ведь ограничение СКП проистекает от неустраняемого обратного флуктуационного влияния в координатном измерении, которое мешает последующим измерениям.

Мы можем взять задачник по квантовой механике (например, Кривченкова и Гольдмана) и найти решение для такой задачи:

Пусть на квантовый осциллятор, находящийся в n -состоянии (состояние с точно определенной энергией) действует резонансная сила. Какова вероятность того, что через время τ осциллятор может быть найден в состоянии $n \pm 1$?

Сразу приведем ответ: амплитуда силы должна быть порядка

$$F_0 > \frac{2}{\tau} \sqrt{\frac{m\hbar\omega_m}{n}}$$

Очевидно, что эта формула дает величину силы *меньше*, чем СКП силы для осциллятора (2.20). Но для того, чтобы воспользоваться этим результатом, надо уметь *точно* измерять энергию осциллятора.

Как мы уже видели измерение энергии через измерение координаты *не* позволяет точно измерить энергию (см. ф-лу (2.22) — ошибка существенно больше кванта $\mathcal{E}_{\text{СКП}} \gg \hbar\omega_m$ или $\Delta n \simeq \sqrt{n} \gg 1$). Поэтому нужна другая схема измерения, которая позволяет *прямо* измерять энергию, "без посредников".

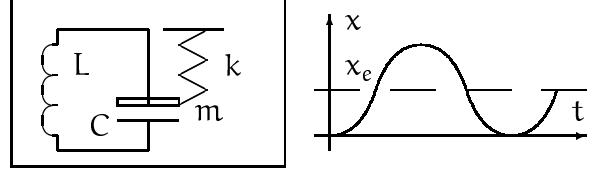


Рис. 2.6: Схема пондеромоторного измерителя энергии.

2.3.1 Схема пондеромоторного измерителя энергии.

Рассмотрим задачу измерения энергии в квантовом э.м. LC-контуре по смещению подвижной пластины конденсатора [11] (см. схему на рис. 2.6). Положение пластины мы измеряем координатным измерителем. Считаем, что частота механических колебаний много меньше частоты электрических колебаний: $\omega_m \ll \omega_e$. Пусть вначале подвижная пластина была закреплена и в начальный момент ее отпускают — она начинает колебания вокруг нового положения равновесия x_e , зависящее от энергии \mathcal{E} в контуре:

$$x_e = \frac{\mathcal{E}}{2dk},$$

где $k = m\omega_m^2$ — жесткость пружины, d — зазор между пластинами. Если мы измеряем величину x_e с ошибкой СКП, то ошибка измерения энергии будет равна:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \simeq \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} 2kd \quad (2.38)$$

Однако при смещении пластины возмущается энергия в контуре (параметрическое воздействие) на величину:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_{\text{возм}} &= \mathcal{E} \frac{\Delta\omega_e}{\omega_e} \simeq \\ &\simeq \mathcal{E} \cdot \frac{\Delta x}{2d} \simeq \frac{\mathcal{E}}{2d} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Мы видим, что ошибка измерения и возмущение энергии будут равны друг другу при $\mathcal{E} \simeq 4kd^2$. Но при этом величина постоянного смещения x_e оказывается слишком большой: $x_e \simeq d$. Поэтому будем считать, что

$$\mathcal{E} \simeq \alpha kd^2, \quad \alpha \ll 1 \quad (2.40)$$

где α — численный множитель. При этом сразу имеем, что возмущение будет мало:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{возм}} = \frac{\alpha}{4} \Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \ll \Delta\mathcal{E}_{\text{изм}}$$

Переписываем выражение (2.38) для ошибки энергии:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} &\simeq \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} 2k\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\alpha k}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega_m (n + 1/2) \hbar\omega_e}{\alpha}} = \\ &= \hbar\omega_e 2\sqrt{n + \frac{1}{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_m}{\omega_e \alpha}}}_{\ll 1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Мы видим, что при условии

$$\sqrt{\frac{4(n + \frac{1}{2})\omega_m}{\omega_e \alpha}} \ll 1$$

(а оно вполне выполнимо) энергия в контуре может быть измерена с ошибкой *меньше* одного кванта:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \ll \hbar\omega_e, \quad \Delta n_{\text{изм}} \ll 1$$

Таким образом мы показали, что возможно измерение энергии с ошибкой *меньше* СКП.

Теперь рассмотрим, а какова "плата" за точное измерение энергии? Сразу скажем ответ: возмущение фазы $\Delta\phi$. Ведь во время измерения частота контура изменяется неконтролируемым образом:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega_e}{\omega_e} &= \frac{\Delta x}{2d}, \quad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} \\ \Delta\phi &= \Delta\omega_e \tau = \frac{\omega_e \tau \Delta x}{2d} = \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$= \frac{\pi\omega_e}{4\omega_m} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m d^2}} \stackrel{(2.40)}{=} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi\omega_e}{4\omega_m} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m} \frac{\alpha k}{\hbar\omega_e (n + 1/2)}} = \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\alpha\omega_e}{(n + 1/2)\omega_m}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Сравнивая (2.44 и 2.41), получаем:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\hbar\omega_e} \cdot \Delta\phi = \pi, \quad (2.45)$$

$$\Delta n \cdot \Delta\phi \geq 1 \quad (2.46)$$

Таким образом, измерение энергии возмущает фазу. Однако возмущение фазы *не мешает* неограниченно уменьшать ошибку измерения энергии.

2.4 Квантовые невозмущающие измерения.

Разобранная нами схема измерения относится к классу *невозмущающих* квантовых измерений (КНИ), по-английски quantum non-demolition measurements (QND). Идея квантовых невозмущаемых измерений была предложена В. Б. Брагинским в 1977 г. [11] и сейчас аббревиатура QND является общепринятым термином.

Теорема. Для реализации КНИ надо измерять так называемую КНИ-переменную (в пондеромоторном измерителе — это энергия в контуре), которая при свободной эволюции системы является *интегралом движения* (т.е. не изменяется со временем). Эту теорему мы приводим без доказательства.

Очевидно, что энергия (осциллятора или свободной массы) являются КНИ-наблюдаемыми, а координата или импульс осциллятора — нет.

Подчеркнем, что импульс свободной частицы — тоже КНИ-наблюдаемая. Именно поэтому импульс свободной частицы можно измерить сколь угодно точно с помощью доплер-измерителя скорости фон-Неймана, с ошибкой *меньше* СКП. При этом неизбежное возмущение координаты *не мешает* измерению импульса. Этот же доплер-измерителя скорости фон-Неймана позволяет измерить и энергию свободной частицы с ошибкой *меньше* СКП, поскольку для свободной частицы энергия за-

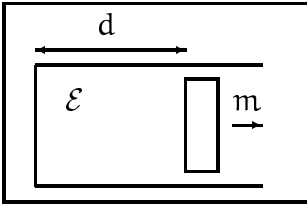


Рис. 2.7: Другая схема пондеромоторного измерителя энергии.

висит только от импульса:

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}.$$

2.4.1 Пондеромоторный измеритель э.м. энергии \mathcal{E} с доплер-измерителем скорости фон-Неймана.

Рассмотрим э.м. резонатор (см. рис. 2.7), в котором одна из стенок является подвижным поршнем, который мы будем рассматривать как свободную массу m . Пусть в начальный момент поршень отпускают на время τ и он под действием давления со стороны поля в резонаторе приобретает импульс

$$p = \frac{\mathcal{E}\tau}{d}$$

Измерив импульс поршня, мы определим энергию в резонаторе. После измерения мы возвращаем поршень на место. Пусть импульс мы измеряем с помощью доплер-измерителя скорости фон-Неймана с ошибкой Δp . При этом за счет внесенного возмущения координаты возмущается фаза. Выписываем:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} &= \frac{d}{\tau} \Delta p_{\text{изм}}, \\ \Delta\phi_{\text{возм}} &= \Delta\omega_e \tau = \omega_e \frac{\Delta x_{\text{возм}}}{d} \tau, \\ \frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}}}{\hbar\omega_e} \cdot \Delta\phi_{\text{возм}} &= \frac{\Delta p_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}}}{\hbar} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Мы видим, что возмущение фазы происходит в соответствии с соотношением неопределенностей.

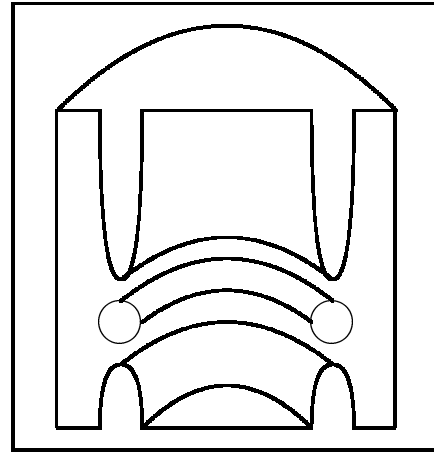


Рис. 2.8: Схема пондеромоторного измерителя энергии с использованием нелинейности диэлектрической проницаемости.

2.4.2 Измеритель энергии с использованием квадратичной нелинейности

Мы видим, что в обоих измерителях энергии используется так называемая пондеромоторная нелинейность — частота резонатора зависит от энергии в нем из-за изменения его размеров под действием пондеромоторной силы (пропорциональной энергии). Для КНИ энергии можно использовать и другую нелинейность, например, зависимость диэлектрической проницаемости ϵ от электрического поля E . Пусть, например,

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha E^2).$$

Тогда можно реализовать КНИ оптической энергии в СВЧ резонаторе, имеющем емкостную часть, который изображен на рис. 2.8. В емкостной части помещено диэлектрическое кольцо (или диск), оно же диэлектрический оптический резонатор на эффекте полного внутреннего отражения. Энергию в оптическом резонаторе мы можем измерить, поскольку появление оптических квантов в нем вызовет изменение диэлектрической проницаемости, а следовательно, и собственной частоты

СВЧ резонатора:

$$\frac{\Delta\omega_{\text{СВЧ}}}{\omega_{\text{СВЧ}}} \simeq \frac{\alpha E^2}{2} \simeq \frac{4\pi \alpha \hbar \omega_{\text{opt}} n_{\text{opt}}}{V_{\text{opt}}}$$

Если диэлектрический резонатор изготовлен из кварца ($\alpha \simeq 10^{-13}$ СГСЭ), то за счет малого объема ($V \simeq 10^{-8}$ см) величина относительного сдвига частоты может быть порядка

$$\frac{\Delta\omega_{\text{СВЧ}}}{\omega_{\text{СВЧ}}} \simeq 1 \cdot 10^{-15}$$

Такую величину можно обнаружить в современном эксперименте.

2.4.3 КНИ квадратурной компоненты

как мы уже говорили, КНИ переменной должен быть интеграл движения (величин. не меняющаяся со временем при свободной эволюции). Для квантового осциллятора кроме энергии интегралами движения являются начальная координата x_0 и начальный импульс p_0 . Поэтому можно измерить с любой сколь угодно малой ошибкой любую из этих величин (но не обе одновременно, поскольку они не коммутируют). Иногда также говорят про КНИ квадратурной компоненты. Это связано со следующим. Изменение координаты со временем можно записать в виде

$$x(t) = x_0 \cos \omega_m t + \frac{p_0}{m\omega_m} \sin \omega_m t \quad (2.47)$$

$$x(t) = x_1 \cos \omega_m t + x_2 \sin \omega_m t, \quad (2.48)$$

$$x_1 = x_0, \quad x_2 = \frac{p_0}{m\omega_m}. \quad (2.49)$$

$$[x_0, p_0] = i\hbar, \quad [x_1, x_2] = \frac{i\hbar}{m\omega_m} \quad (2.50)$$

Величины x_1, x_2 называют квадратурными компонентами. Очевидно, что при свободной эволюции квадратурные компоненты не изменяются. Мы рассмотрим две схемы измерения квадратурной компоненты.

Стробирующее измерение

Пусть мы измеряем координату осциллятора дважды: в момент времени $t_1 = 0$ с ошибкой

Δx_1 и через пол-периода в момент времени $t_2 = \pi/\omega_m$ с ошибкой Δx_2 . Тогда ошибка измерения их разности $X = x_2 - x_1$ будет равна:

$$\begin{aligned} \Delta X^2 &= \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \\ &+ \left(\frac{\hbar}{2\Delta x_1 m\omega_m} \right)^2 \underbrace{\sin^2 \omega_m t_2}_{=0} = \\ &= \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Мы видим, что если разнести измерения на время *точно* кратное половине периода, то обратное флуктуационное влияние не мешает сделать общую ошибку измерения сколь угодно малой. Это связано со свойством эволюции осциллятора. Если за время между двумя измерениями действовала малая сигнальная сила, то ее действие может быть обнаружено с неограниченной точностью (по крайней мере, теоретически).

Недостатком стробирующего измерения является необходимость точно измерить координату за короткое время — это требует большой накачки и технически трудно реализуемо.

Измерение квадратурной компоненты

Запишем уравнения эволюции осциллятора:

$$x(t) = x_1 \cos \omega_m t + x_2 \sin \omega_m t, \quad (2.52)$$

$$\frac{p(t)}{m\omega_m} = -x_1 \sin \omega_m t + x_2 \cos \omega_m t, \quad (2.53)$$

Можно формально разрешить эту систему относительно x_1 и x_2 :

$$x_1 = x(t) \cos \omega_m t - \frac{p(t)}{m\omega_m} \sin \omega_m t \quad (2.54)$$

$$x_2 = x(t) \sin \omega_m t + \frac{p(t)}{m\omega_m} \cos \omega_m t \quad (2.55)$$

Отсюда мы можем заключить, что для реализации КНИ мы можем *непрерывно* измерять не координату или импульс, а их линейную комбинацию, задаваемую выражением (2.54) или (2.55). Тогда ошибка измерения не ограничена и возможно сколь угодно точное измерение внешней силы. Заметим, что измеряя сколь

удобно точно квадратуру, скажем, x_1 мы столь же сильно возмущаем другую квадратуру x_2 , но это возмущение нам не мешает.

Такое "прямое" измерение квадратурной позволяет использовать непрерывное измерение, однако реализовать его технически довольно сложно. Подчеркнем, что надо прямо измерять комбинацию (2.54) (отдельное измерение координаты и импульса и последующее их комбинирование не подходят).

Фазовые портреты

Измерение квадратурных компонент связано с так называемыми сжатыми состояниями (squeezed states). Эти состояния можно проиллюстрировать (не строго, но наглядно) с помощью фазовых портретов.

Но начнем с когерентного состояния. В когерентном состоянии неопределенность координаты и импульса такие же, как и в основном состоянии осциллятора, а средние координата и импульс изменяются по классическому закону. Можно выписать гейзенберговские уравнения эволюции для операторов координаты $\hat{x}(t)$ и нормированного импульса $\hat{y}(t) = \frac{\hat{p}}{m\omega_m}$:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_1 \cos \omega_m t + \hat{x}_2 \sin \omega_m t, \quad (2.56)$$

$$\hat{y}(t) = -\hat{x}_1 \sin \omega_m t + \hat{x}_2 \cos \omega_m t. \quad (2.57)$$

Здесь \hat{x}_1, \hat{x}_2 — операторы квадратурных компонент, фактически это начальная координата и нормированный начальный импульс, которые не зависят от времени. Предположим, что флуктуации квадратурных компонент не коррелируют друг с другом, т.е. $\langle \Delta x_1 \Delta x_2 \rangle = 0$. Тогда можно сразу выписать для средних и дисперсий:

$$\langle \hat{x}(t) \rangle = \langle \hat{x}_1 \rangle \cos \omega_m t + \langle \hat{x}_2 \rangle \sin \omega_m t, \quad (2.58)$$

$$\langle \hat{y}(t) \rangle = -\langle \hat{x}_1 \rangle \sin \omega_m t + \langle \hat{x}_2 \rangle \cos \omega_m t, \quad (2.59)$$

$$\Delta x^2(t) = \Delta x_1^2 \cos^2 \omega_m t + \Delta x_2^2 \sin^2 \omega_m t, \quad (2.60)$$

$$\Delta y^2(t) = \Delta x_1^2 \sin^2 \omega_m t + \Delta x_2^2 \cos^2 \omega_m t. \quad (2.61)$$

Глядя на эти уравнения, можно изобразить фазовый портрет когерентного состояния, для которого $\Delta x_1^2 = \Delta x_2^2 = \hbar/(2m\omega_m)$, как вращающееся круглое пятно, диаметр которого равен

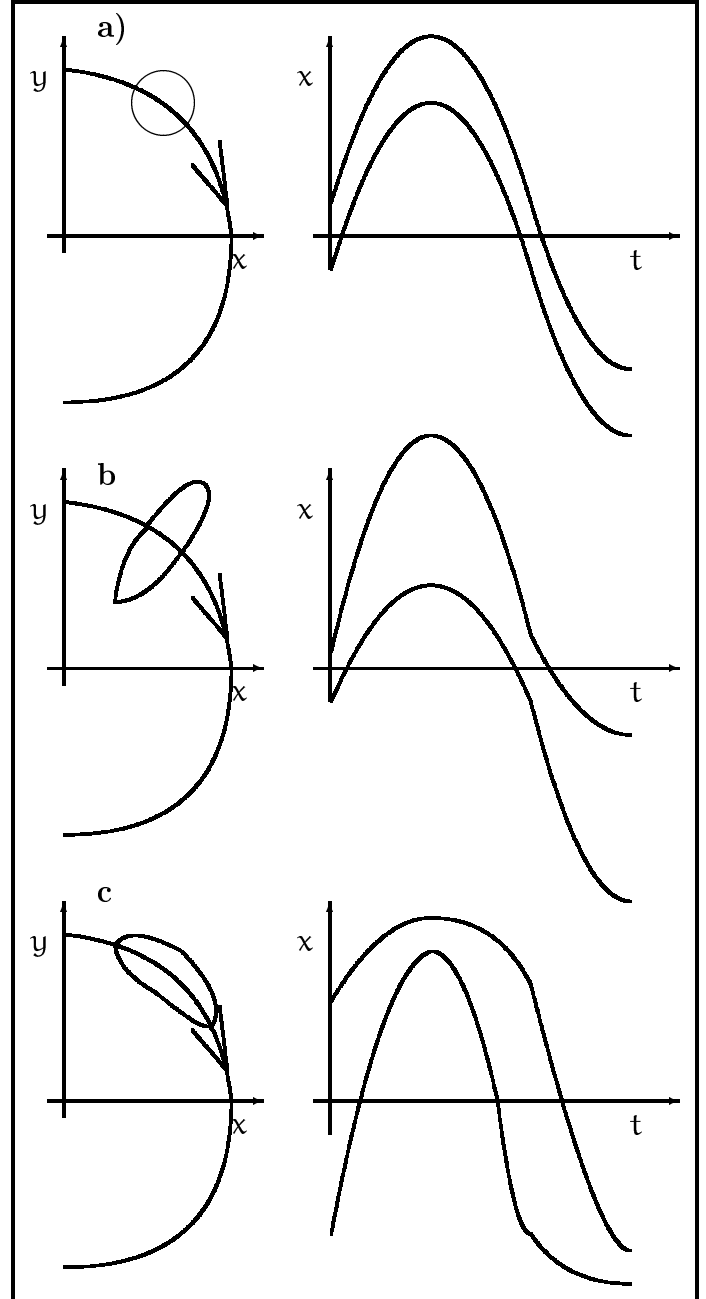


Рис. 2.9: Фазовые портреты и примеры эволюция координаты для когерентного состояния (a) и для сжатых состояний (b,c).

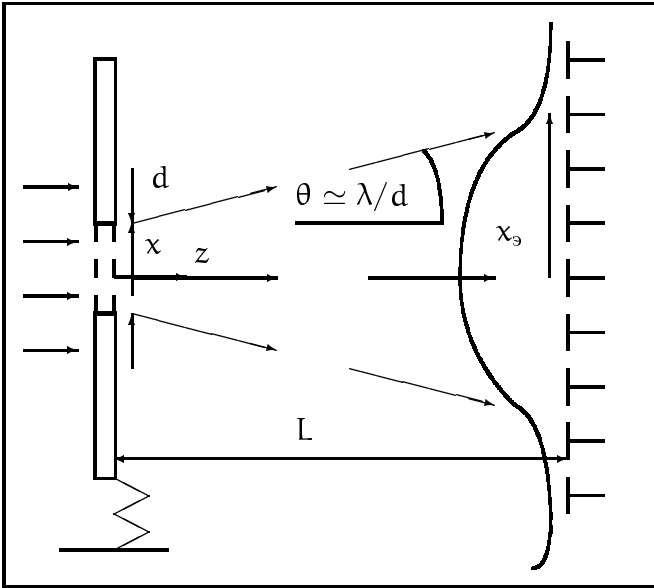


Рис. 2.10: Микроскоп Гейзенберга.

Δx_1^2 — см. рис. 2.9 (а). В классике состояние системы описывается точкой, в нашей иллюстрации точка превращается в пятно — это отражает квантовую неопределенность. Очевидно, что когерентное состояние является наиболее близким к классическому. Заметим, что неопределенность когерентного состояния практически совпадает с СКП.

Сжатое состояние характеризуется тем, что неопределенность одной квадратурной компоненты значительно больше (или меньше) другой. Поэтому пятно, соответствующее флуктуациям сжато по одной оси и растянуто по другой так, что площадь его не изменяется (неизменность площади соответствует выполнению соотношений неопределенностей). Два возможных варианта сжатых состояний представлены на рис. 2.9 (b,c). При измерении квадратурной компоненты состояние осциллятора редуцируется в сжатое.

2.5 Квантовое вариационное измерение

Для дальнейшего изложения нам будет важно понять, что измерительные шумы и шумы обратного влияния можно сделать коррелиро-

ванными.

Рассмотрим еще раз микроскоп Гейзенберга (рис. 2.4). Мы говорили, что экран (плоскость фотодетекторов) должна быть расположена на близком расстоянии от щели так, что размер пятна на экране практически совпадает с размером щели. Зададимся вопросом: а что мы будем измерять, если экран расположен дальше? Ведь в этом случае размер пятна на экране из-за дифракции будет больше, и, казалось бы, это ухудшит точность. Однако это не так. Ведь координата Y точки экрана, где был поглощен фотон, несет информацию (рассуждаем квазиклассически) и от точки щели x , "через которую прошел" фотон, и о поперечном импульсе p_x , приобретенном фотоном после прохождения щели:

$$x_3 = x + \frac{p_x L}{mc}$$

Таким образом, мы получаем информацию о *линейной комбинации* ошибки измерения и импульса обратного влияния. Заметим, что отдавая экран на бесконечность, мы получим возможность измерять точно импульс обратного влияния, который можем в принципе полностью компенсировать. Правда, при этом не будет никакой информации о координате щели. Наоборот, при близко расположенном экране мы получаем информацию о координате щели, но ничего не знаем про обратное флуктуационное влияние.

Таким образом мы видим, что при небольшой модификации обычный измеритель координаты может измерять не координату, а *линейную комбинацию* ошибки измерения и импульса обратного влияния:

$$x_3 = x + \alpha p_x \tag{2.62}$$

Важно, что коэффициент α можно выбирать произвольным образом.

Принцип квантового вариационного измерения легко понять на примере схемы из трех измерений, в которой во втором измерении включим измерение линейной комбинации координаты и импульса обратного влияния, т.е. $\alpha_2 \neq 0$:

$$x_1 = x_0 + x_{1\text{изм}}, \tag{2.63}$$

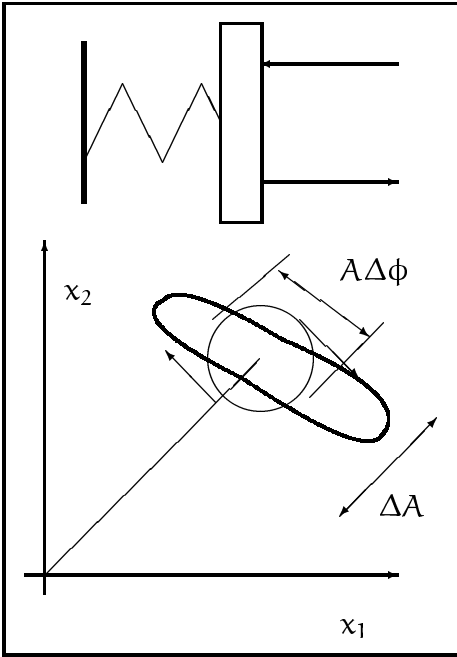


Рис. 2.11: Простейший оптический датчик.

$$x_2 = x_0 + x_{2\text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)}{2m} \cdot \tau + \quad (2.64)$$

$$+ \alpha_2 p_2 + \frac{F_0}{2m} \cdot \tau^2,$$

$$x_3 = x_0 + x_{3\text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)}{m} \cdot 2\tau + \quad (2.65)$$

$$+ \frac{p_2}{m} \cdot \tau + \frac{F_0}{2m} \cdot 4\tau^2,$$

$$\begin{aligned} X &= x_3 + x_1 - 2x_2 = \\ &= x_{1\text{изм}} + x_{3\text{изм}} - 2x_{2\text{изм}} + \\ &\quad + p_2 \left(\frac{\tau}{m} - 2\alpha_2 \right) + \frac{F_0}{m\tau^2} \quad (2.66) \end{aligned}$$

Мы видим, что при правильном выборе параметра

$$\alpha_2 = \frac{\tau}{2m}$$

в измеряемую комбинацию X импульс обратного влияния не входит. Таким образом, мы получили процедуру, свободную от обратного флуктуационного влияния. Отметим, что состояние пробной массы, конечно, сильно возмущается импульсами обратного влияния, однако процедура построена таким образом, что прибор "не видит" этого возмущения.

Отметим, что в квантовом вариационном измерении в отличие от КНИ нет не возмущаемой наблюдаемой. Именно это обстоятельство

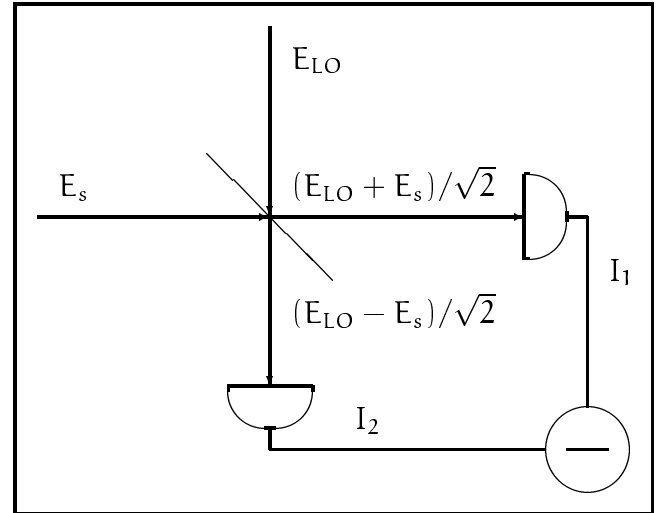


Рис. 2.12: Балансная гомодинная схема разрушающего измерения квадратурной компоненты сигнальной волны E_s . Амплитуда E_{LO} опорного генератора велика: $E_{LO} \gg E_s$.

не позволяет отнести вариационное к КНИ.

2.5.1 Простейший оптический датчик.

Рассмотрим простейший оптический датчик смещений, изображенный на рис. 2.11, в качестве примера датчика наиболее близкого к эксперименту.

Пусть от пробной массы отражается импульс э.м. волны. Будем считать, что длительность импульса τ_0 мала, т.е. за время τ_0 пробная масса практически не сдвигается. Однако длительность τ_0 много много больше периода волны ($\omega_e \tau_0 \gg 1$). Фаза ϕ отраженной волны зависит от координаты x пробного тела и начальная неопределенность фазы $\Delta\phi$ в импульсе будет определять ошибку измерения координаты Δx :

$$\phi = \frac{2\omega_e x}{c}, \quad \Delta x_{\text{изм}} = \frac{c \Delta\phi}{2\omega_e} \quad (2.67)$$

При этом обратное флуктуационное влияние проявится в неопределенности импульса силы светового давления (оно определяется неопре-

деленностью энергии в э.м. импульсе):

$$\Delta p_{\text{возм}} = \frac{2\Delta\mathcal{E}}{c} = \frac{2\hbar\omega_e \Delta n}{c} \quad (2.68)$$

Пусть падающая световая волна находится в когерентном состоянии, для которого, как мы видели, флуктуации квадратурных компонент равны. Поэтому на фазовой плоскости такое состояние может быть изображено в виде круглого пятна, квадрат диаметра которого равен дисперсии любой квадратурной компоненты (см. рис. 2.11), в частности, неопределенность фазы $\Delta\phi$ и относительная неопределенность амплитуды $\Delta A/A$ равны:

$$\Delta A = A\Delta\phi, \quad (2.69)$$

$$\Delta\phi \simeq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad (2.70)$$

$$\Delta n \simeq A\Delta A = 2n \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad (2.71)$$

Пользуясь этими соотношениями и (2.67, 2.68) можно показать, что выполняется соотношение неопределенностей (обычное для измерителей координаты):

$$\Delta x_{\text{изм}} \Delta p_{\text{возм}} = \hbar \Delta n \Delta\phi \simeq \frac{\hbar}{2} \quad (2.72)$$

Балансная гомодинная схема. Для измерения фазы отраженной волны обычно используют балансную гомодинную схему, изображенную на рис. 2.12. Точнее, эта схема используется для измерения *квадратурной компоненты*. На полупрозрачное зеркало направляют сигнальную волну (в нашем случае это волна, отраженная от пробного тела)

$$E_s = A e^{-i\omega_e t} + \text{к.с.}$$

и мощная волна опорного генератора (по-английски — local oscillator)

$$E_{\text{LO}} = B e^{-i\theta - i\omega_e t} + \text{к.с.}, \quad |B| \gg |A|,$$

фазу которого можно задавать произвольным образом (вводя нужную задержку). После прохождения полупрозрачного зеркала (50 % света проходит, 50% — отражается) мы получаем

две волны E_1 и E_2 , которые поглощаются на детекторах, токи I_1 , I_2 которых пропорциональны квадрату падающего поля:

$$E_1 = \frac{E_s + E_{\text{LO}}}{\sqrt{2}}, \quad (2.73)$$

$$E_2 = \frac{E_s - E_{\text{LO}}}{\sqrt{2}}, \quad (2.74)$$

$$I_1 = kE_1^2 = \frac{k}{2}(E_s^2 + 2E_s E_{\text{LO}} + E_{\text{LO}}^2) \quad (2.75)$$

$$I_2 = kE_2^2 = \frac{k}{2}(E_s^2 - 2E_s E_{\text{LO}} + E_{\text{LO}}^2) \quad (2.76)$$

где k — константа. Далее эти токи подаются на вычитающее устройство, на выходе которого мы измеряем разностный ток

$$J = I_1 - I_2 = 4kE_s E_{\text{LO}} \quad (2.77)$$

Пусть теперь комплексные амплитуды и сигнальной, и опорной волн могут быть представлены как большая средняя величина (мы обозначаем ее индексом 0) и малые флуктуации. Тогда можно получить выражение для разностного тока с точностью до членов нулевого и первого порядка малости после уреднения по периоду $2\pi/\omega_e$:

$$A = A_0 + a, \quad |a| \ll |A_0|, \quad (2.78)$$

$$B = B_0 + b, \quad |b| \ll |B_0|, \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} J &\simeq 4k(A_0(b e^{-i\theta} + b^* e^{i\theta}) + \\ &\quad + B_0[a e^{i\theta} + a^* e^{-i\theta}]) \simeq \\ &\simeq 4k B_0[a e^{i\theta} + a^* e^{-i\theta}] \quad (2.80) \end{aligned}$$

Здесь мы приняли для простоты, что $A_0 = A_0^*$ и $B_0 = B_0^*$ (это не приводит к потери общности). В последнем равенстве мы использовали условие $B_0 \gg A_0$ (мощность опорной волны много больше мощности сигнальной).

Подчеркнем, что в результате мы получили, что разностный ток J пропорционален квадратурной компоненте в сигнальной волне:

$$\begin{aligned} J &\sim q_\theta = a e^{i\theta} + a^* e^{-i\theta} = \\ &= \underbrace{(a + a^*)}_{\Delta A} \cos \theta - \underbrace{\frac{a - a^*}{A\Delta\phi}}_i \sin \theta \end{aligned}$$

Очевидно, что при $\theta = 0$ в схеме измеряется амплитудная квадратурная компонента сигнальной волны, а при $\theta = \pi/2$ — фазовая квадратурная компонента.

Теперь вернемся к нашему оптическому датчику и вспомним, что флуктуации фазовой квадратурной компоненты отвечают за ошибку измерения координаты, а флуктуации амплитудной квадратуры — за импульс обратного флуктуационного влияния. Поэтому измеряя фазу, я получаю датчик смещений. Однако, измеряя квадратуру q_θ при произвольном угле опорного генератора θ мы получаем возможность измерять произвольную *линейную комбинацию* ошибки измерения и импульса обратного влияния (2.62), которую необходимо измерять к квантовом вариационном измерении. Мы видим на примере этого оптического датчика, что небольшая модификация координатного измерителя превращает его в измеритель для квантового вариационного измерения.

Можно также взглянуть на этот процесс измерения по-другому. Для падающей волны подвижное зеркало представляет собой пондеромоторную нелинейность — фаза $\phi_{\text{отр}}$ отраженной волны зависит от смещения зеркала, которое в свою очередь зависит от силы давления, пропорциональной квадрату поля

$$\phi \sim E_s^2 \sim A\Delta A. \quad (2.81)$$

(Аналогичная ситуация возникает при распространении э.м. волны в среде с кубической нелинейностью (диэлектрическая проницаемость пропорциональна квадрату поля: $\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha E^2)$). Там тоже выполняется соотношение (2.81) поскольку скорость распространения волны в такой среде не постоянна, а зависит от амплитуды волны.)

Таким образом отраженная волна из-за самовоздействия будет преобразована, как показано на нижнем рисунке 2.11: флуктуационное круглое пятно трансформируется в эллипс. Таким образом мы получим *сжатое* состояние. Заметим, что измерение сжатой компоненты как раз соответствует измерению *линейную ком-*

бинацию ошибки измерения и импульса обратного влияния (2.62) (!).

Глава 3

Задачи

- 1) "Тепловые дисперсии". Найдите дисперсию тока и напряжения в колебательном контуре (рис. 1.1, слева), вызванных классическими тепловыми шумами.
- 2) "Квантовые дисперсии". Найдите дисперсию тока и напряжения в колебательном контуре (рис. 1.1, слева) в квантовом пределе $k_B T \rightarrow 0$.
- 3) "Склон резонансной кривой". В последовательный высокодобротный LC-контур включен генератор синусоидального напряжения $U_g e^{i\omega t}$ (см. также рис. 1.3). Расстояние между пластинами конденсатора изменяется от d до $d + \Delta x$. Показать, что при этом максимальное изменение амплитуды напряжения на емкости будет при

$$\omega_g \simeq \pm \frac{\omega_e}{2Q_e} \quad (3.1)$$

где ω_e и $Q_e \gg 1$ — собственная частота и добротность контура.

Указание:

$$\begin{aligned} \omega_e &= \frac{1}{LC}, \quad \frac{d\omega_e}{dd} = \frac{\omega_e}{2d}, \\ U_C(\omega_g) &= \frac{U_g}{R + i\left(L\omega_g - \frac{1}{\omega_g C}\right)} \times \frac{1}{i\omega_g C} = \\ &= \frac{U_g y^2}{\frac{i y}{Q_e} + y^2 - 1}, \quad y = \frac{\omega_e}{\omega_g}, \\ |U_C| &= \frac{|U_g| y^2}{\sqrt{\frac{y^2}{Q_e^2} + (y^2 - 1)^2}}, \\ \frac{d|U_C|}{d\omega_e} &= \frac{1}{\omega_g} \frac{d|U_C|}{dy}, \end{aligned}$$

$$\text{Экстремум } \frac{d|U_C|}{dy} \Rightarrow y_{1,2} = \dots$$

- 4) "Емкостной датчик". Доказать формулу (1.22) и сформулировать условия ее применимости. См. указание к задаче 3.1.
- 5) "Условие работы емкостного датчика". Пусть в емкостном датчике расстояние $D(t)$ между пластинами изменяется по закону

$$D(t) = d + \Delta x(t), \quad \Delta x = x_0 \cos \Omega t$$

Найдите, при каких величинах x_0 , Ω будут справедливы формулы (1.21 и 1.22).

- 6) "Скачок". Пусть в емкостном датчике в момент времени $t = 0$ расстояние d между пластинами конденсатора скачком изменяется на величину

$$\Delta x \ll d$$

Найдите, как при этом изменится амплитуда и фаза вынужденных колебаний в контуре (через какое время установятся их новые значения)? Разобрать два случая: а) в момент времени $t = 0$ заряд на конденсаторе равен нулю; б) в момент времени $t = 0$ заряд на конденсаторе максимален.

Приложение А

Описание случайных процессов

Гауссовы процессы . Мы будем рассматривать только гауссовы процессы, т.е. процессы с плотностью вероятности, описываемой гауссовым распределением.

Эргодическая гипотеза: усреднение по ансамблю и по большому отрезку времени эквивалентны. Мы будем также рассматривать только стационарные случайные процессы, для которых среднее, дисперсия и другие моменты не зависят от времени.

Таким образом для среднего \bar{x} и дисперсии σ мы можем записать:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \equiv \langle x \rangle,$$

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}, \quad \sigma = \overline{\Delta x^2} = \overline{(x(t) - \bar{x})^2}.$$

Напомним, что в нашем случае величины \bar{x} и σ не зависят от времени.

Корреляция. Рассмотрим сумму двух случайных напряжений $u_1(t) + u_2(t)$. Тогда их квадрат (он пропорционален выделяющейся мощности) равен

$$\overline{(u_1(t) + u_2(t))^2} = \overline{u_1(t)^2} + \overline{u_2(t)^2} + 2\overline{u_1(t)u_2(t)}.$$

Здесь первые два члена в правой части соответствуют средним мощностям каждого источника. Последний член пропорционален произведению двух случайных величин и описывает их корреляцию. Если источники $u_1(t)$ и $u_2(t)$ независимы друг от друга, то их произведение в среднем будет равно нулю. В этом случае говорят, что источники *не коррелированы*.

Среднее и дисперсия случайного процесса не описывают связи между значениями случайного напряжения в различные моменты времени. Для этого служит *автокорреляционная* функция, которая определяется следующим образом (напомним, что $\overline{u(t)} = 0$):

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \overline{u(t)u(t-\tau)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t-\tau) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Здесь τ — временной сдвиг. Для стационарного процесса автокорреляционная функция, как это следует из определения (A.1), зависит только от $|\tau|$ ¹. Таким образом можем записать:

$$B(0) = \sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2 dt,$$

$$B(\tau) = B(-\tau).$$

При $\tau = 0$ автокорреляционная функция равна дисперсии.

Теорема Винера-Хинчина Можно применить преобразование Фурье к случайной величине $u(t)$:

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt, \\ \overline{u(\omega)} &= 0. \end{aligned}$$

¹Вообще говоря, случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его среднее и дисперсия не зависят от времени, а автокорреляционная функция зависит от модуля $|\tau|$.

Последнее равенство очевидно (т.к. $\overline{u(t)} = 0$).
Рассмотрим среднее

$$\begin{aligned} A(\omega, \omega') &= \overline{u(\omega) u(\omega')^*} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \overline{u(t) u(t')} e^{i(\omega t - \omega' t')} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' B(t - t') e^{i(\omega t - \omega' t')}. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} A(\omega, \omega') &= \overline{u(\omega) u(\omega')^*} = \\ &= 2\pi \delta(\omega - \omega') \tilde{S}_u(\omega), \quad (A.2) \\ \tilde{S}_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (A.3) \end{aligned}$$

Величина $\tilde{S}_u(\omega)$ называется спектральной плотностью шума u . Смысл равенства (A.2) заключается в том, что спектральные гармоники $u(\omega)$ и $u(\omega')$ статистически не зависимы, а средний квадрат одной гармоники определяется спектральной плотностью $\tilde{S}_u(\omega)$.

Равенство (A.3) утверждает, что автокорреляционная функция и спектральная плотность связаны преобразованием Фурье. Следовательно, верно и обратное преобразование Фурье. Эти два утверждения и составляют содержание теоремы Винера-Хинчина:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B(\tau) e^{i\omega\tau}, \quad (A.4) \\ B(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{S}_u(\omega) e^{-i\omega\tau} \quad (A.5) \end{aligned}$$

Подчеркнем, что спектральная плотность $\tilde{S}_u(\omega)$ определена для положительных и отрицательных частот. Очевидно, что функция $\tilde{S}_u(\omega)$ четна (это очевидно из (A.4) в силу четности автокорреляционной функции $B(\tau)$). Физический смысл спектральной плотности $\tilde{S}_u(\omega)$ ясен из (A.5) и заключается в следующем. Пусть случайное напряжение $u(t)$ на единичном сопротивлении мы измеряем через фильтр, имеющий узкую полосу $\Delta\omega$ (в пределе $\Delta\omega \rightarrow 0$). Тогда среднее напряжение, естественно, будет равно нулю, а средний квадрат напряжения определится из равенства $\Delta u^2 \simeq 2\tilde{S}_u(\omega) \times (\Delta\omega/2\pi)$. Здесь множитель 2 впереди

появляется из-за того, что спектральная плотность $\tilde{S}_u(\omega)$ определена и для отрицательных частот.

Везде ниже мы будем пользоваться "односторонним" определением спектральной плотности² $S(\omega) = 2\tilde{S}_u(\omega)$. Тогда теорема Винера-Хинчина (A.4, A.5) переписывается в виде:

$$S_u(\omega) = 4 \int_0^{\infty} d\tau B(\tau) \cos(\omega\tau), \quad (A.6)$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_u(\omega) \cos(\omega\tau) \quad (A.7)$$

Из формулы (A.7) сразу следует, что дисперсия σ_u случайного напряжения определяется интегралом:

$$\sigma_u = B(0) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_u(\omega). \quad (A.8)$$

Это равенство можно переписать в виде $\sigma_u = \sum \overline{\Delta u^2(\omega)}$ и тогда спектральную плотность можно понять как отношение среднего квадрата напряжения $\overline{\Delta u^2(\omega)}$, генерируемое в узкой полосе $\Delta\omega/2\pi$, к этой полосе частот:

$$S_u(\omega) = 2\pi \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta u^2(\omega)}}{\Delta\omega}$$

²Т.е. $S(\omega)$ определена только для положительных ω . При этом определение автокорреляционной функции $B(\tau)$ не изменяется.

Литература

- [1] Н. В. Callen and Т. А. Welton, *Phys. Rev.* **83**, 34 (1951).
- [2] В. Б. Брагинский, Физические измерения с пробными телами, Москва, Наука, 1970.
- [3] Д. Н. Клышко, Фотоны и нелинейная оптика. Москва, Наука, 1980.
- [4] S. P. Vyatchanin, Quantum variation measurement and Heisenberg microscope, *Optics and Spectroscopy*, 87, 532-540 (1999); электронный вариант доступен по адресу <http://hbar.phys.msu.ru>
- [5] Фон Нейман,
- [6] V.V.Braginsky, F.Ya.Khalili, *Quantum Measurement*, Cambridge University Press, 1992.
- [7] Ю. И. Воронцов, Теория и методы макроскопических измерений, Москва, Наука, 1989.
- [8] Д. Бом, Квантовая теория, Физматгиз, 1961,
- [9] В. Б. Брагинский, *ЖЭТФ*, **53**, 1436 (1967).
- [10] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, F. Ya. Khalili, A. B. Matsko, K. S. Thorne and S. P. Vyatchanin, submitted to *Phys. Rev. D*; gr-qc/0109003.
- [11] В. Б. Брагинский, Ю. И. Воронцов, Ф. Я. Халили, *ЖЭТФ*, **73**, 1340-1343 (1977).