

Глава 1

Резонанс, резонатор и добротность

Развитие волоконной и интегральной оптики привело к разработке широкой гаммы малогабаритных оптических устройств, фильтров, модуляторов, дефлекторов и т. д. В настоящее время достаточно полно разработаны принципы построения и создана широкая гамма гибридных, электро- и акусто-оптических, элементов. Дальнейшее развитие когерентной оптики и систем оптической обработки информации требует перехода к чисто оптическим линейными и нелинейными устройствами, которые открывают путь к значительному сокращению габаритов приборов, уменьшению энергопотребления и повышению быстродействия.

Неотъемлемым элементом почти любого сложного оптического и микроволнового прибора является резонатор. Именно прогресс в совершенствовании резонаторов зачастую приводил к достижению качественно новых результатов. Так, появление лазеров и лазеров было бы невозможно без реализации высокодобротных резонаторов СВЧ и оптического диапазонов. Высокодобротные резонаторы активно используются для сужения и стабилизации линии генерации, в качестве фильтров и дискриминаторов, в разнообразных высокочувствительных сенсорах и датчиках, в метрологии и в прецизионных физических экспериментах.

Так, одним из ключевых направлений развития физики сегодня является квантовая теория измерений и связанный с ней интерес к манипуляциям с отдельными квантовыми объектами. Резонаторы играют существенную роль в этих исследованиях. Именно с помощью миниатюрных высокодобротных резонаторов в оптическом диапазоне были впервые продемонстрированы неклассические состояния электромагнитного поля и были впервые проведены впечатляющие эксперименты по наблюдению эффектов взаимодействия отдельных фотонов и отдельных атомов. Тесно связаны с этим направлением и такие, вызывающие активное внимание и ожидания, приложения, как квантовые компьютеры, квантовая криптография и квантовая телепортация. Одним из основных требований для наблюдения квантовых эффектов является изоляция системы от внешнего классического мира и уменьшение в ней диссипации для замедления распада состояний (декогеренции), что означает для резонаторов повышение добротности.

1.1 Колебательный контур и резонатор

Принципиальные особенности работы резонатора можно рассмотреть, используя модель колебательного контура с сосредоточенными параметрами (рис. 1.1). Колебательный контур может запасать энергию электрического и магнитного поля в емкости и индуктивности и описывается обычным уравнением колебаний:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U(t), \quad (1.1)$$

где q – электрический заряд, L – индуктивность, R – сопротивление, C – емкость, $U(t)$ – напряжение генератора. Уравнение (1.1) может быть представлено в стандартной форме уравнения, описывающего вынужденные колебания линейного осциллятора

$$\ddot{q} + 2\delta_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\omega_0}{\rho_0} U(t), \quad (1.2)$$

где введены параметры: характеристическое сопротивление контура

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (1.3)$$

декремент затухания

$$\delta_0 = \frac{R}{2L}, \quad (1.4)$$

и собственная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.5)$$

Модель, описываемая уравнением (1.2), также позволяет ввести понятие собственной добротности $Q_0 = \omega_0/2\delta_0$.

Для описания установившихся вынужденных колебаний, когда все переходные процессы уже затухли, решение удобно искать в спектральном виде:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int U(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.6)$$

превращающим дифференциальное уравнение в алгебраическое с решением

$$q(\omega) = U(\omega) \frac{\omega_0}{\rho_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta_0}. \quad (1.7)$$

Из этого выражения сразу определяется стационарный отклик на гармонический сигнал $U_0 \cos(\omega t + \phi) = U_0 \Re[e^{-i(\omega t + \phi)}]$:

$$q(t) = U_0 \frac{\omega_0}{\rho_0} \Re \left[\frac{e^{-i(\omega t + \phi)}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta_0} \right]. \quad (1.8)$$

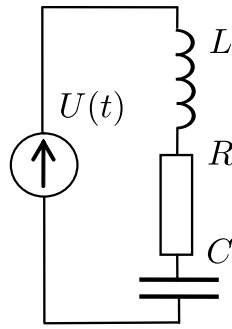


Рис. 1.1: Простой колебательный контур.

Резонансом называется резкое увеличение амплитуды колебаний заряда, а также тока и напряжений на элементах вблизи частоты ω_0 из-за обращения в нуль действительной части знаменателя. Ширина амплитудной резонансной кривой по уровню $1/\sqrt{2}$ (или на кривой мощности по уровню $1/2$) равна $2\delta_0$. При этом фаза колебаний заряда оказывается сдвинута на $\pi/2$, а полная запасенная в контуре энергия

$$\mathcal{E} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \quad (1.9)$$

не осциллирует.

Задание 1. *Покажите, что точные значения частот, при которых достигаются максимальные значения напряжений U_R , U_C и U_L не совпадают и найдите эти частоты. Покажите, что только на резонансной частоте $\omega = \omega_0$ амплитуды U_C и U_L одинаковы, а колебания происходят в противофазе. Вычислите значение полной энергии, запасаемой в контуре в зависимости от частоты.*

Модель колебательного контура хорошо описывает свойства любой линейной колебательной системы вблизи одного из ее резонансов. Недостатком модели с сосредоточенными параметрами является то, что в ее рамках нельзя ввести понятие спектра мод системы. Эта модель не предусматривает также одной важной особенности резонаторов – то, что они возбуждаются не заданным напряжением $U(t)$, а волной, которая приходит от генератора и частично поглощается в резонаторе, а частью отражается от него.

1.2 Добротность собственная и нагруженная

Модель с использованием длинной линии (рис. 1.2) позволяет учесть распределенный характер возбуждения колебаний в резонаторе, а также ввести чрезвычайно важные в теории резонаторов понятия собственной и нагруженной добротностей. Длинная линия представляет собой два подводящих проводника, длина которых много больше длины волны, распространяющейся по линии, а поперечные размеры – много меньше

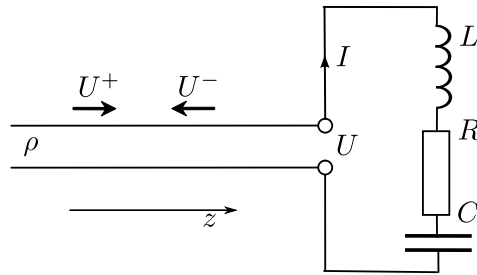


Рис. 1.2: Колебательный контур, подключенный к длинной линии.

этой длины волны. Такие проводники имеют емкость и индуктивность, пропорциональные длине. Примерами длинной линии могут служить коаксиальный телевизионный антенный кабель и витая пара в разводке локальных компьютерных сетей.

Пространственное распределение напряжения и тока в длинной линии без дисперсии и потерь описываются при помощи выведенных Оливером Хевисайдом из уравнений Максвелла так называемых телеграфных уравнений (по специальности Хевисайд был телеграфистом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} &= -\tilde{L} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -\tilde{C} \frac{\partial U}{\partial t},\end{aligned}\quad (1.10)$$

где z – координата, \tilde{L} – распределенная индуктивность (индуктивность на единицу длины линии), \tilde{C} – распределенная емкость, ω – частота. Можно отметить, что телеграфные уравнения при введении эквивалентных параметров достаточно хорошо описывают распространение сигналов в любых системах с поперечными электромагнитными волнами, даже если их характерные размер сравнимы и больше длины волны.

Решение уравнений (1.10) в Фурье виде можно представить в виде бегущих волн

$$U = U^+ e^{-i(\omega t - \beta z)} + U^- e^{-i(\omega t + \beta z)}, \quad (1.11)$$

$$I = \frac{1}{\rho} [U^+ e^{-i(\omega t - \beta z)} - U^- e^{-i(\omega t + \beta z)}], \quad (1.12)$$

где константа распространения выражается в виде $\beta = \omega \sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}$, $\rho = \sqrt{\tilde{L}/\tilde{C}}$ – волновое сопротивление длинной линии, U^+ и U^- – амплитуды волн напряжения бегущих в разных направлениях.

Пусть на колебательный контур, расположенный в начале оси z , падает волна с амплитудой $U^+(t)$, а отражается от контура волна с амплитудой $U^-(t) = \mathcal{R}_u U^+(t)$, где \mathcal{R}_u – коэффициент отражения по напряжению. Напряжения в падающей и отраженной

волне связаны с токами равенствами:

$$\begin{aligned} U^+ &= \rho I^+ \\ U^- &= -\rho I^-, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где ρ – волновое сопротивление линии. Полный ток I и напряжение U на конце линии с присоединенной нагрузкой Z ($Z = U/I$) вводятся как

$$\begin{aligned} U &= U^+ + U^- \\ I &= I^+ + I^-. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пользуясь приведенными соотношениями (1.13, 1.14) легко показать, что коэффициент отражения по напряжению связан с импедансом нагрузки Z соотношением:

$$\mathcal{R}_u = \frac{Z - \rho}{Z + \rho}. \quad (1.15)$$

Запишем систему уравнений для напряжения и тока на контуре:

$$\begin{aligned} L\dot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q &= U^+(t) + U^-(t) = U^+(t)(1 + \mathcal{R}_u), \\ \dot{q} = I &= I^+(t) + I^-(t) = \frac{1}{\rho}U^+(t)(1 - \mathcal{R}_u). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Умножим второе уравнение (1.16) на ρ и сложим с первым. В результате получим уравнение вынужденных колебаний для колебательного контура (1.1) с несколькими отличающимися коэффициентами

$$L\ddot{q} + (R + \rho)\dot{q} + \frac{1}{C}q = 2U^+(t). \quad (1.17)$$

Таким образом, мы получили, что контур с линией эквивалентен обычному контуру на рис. 1.1, если заменить генератор источником напряжения $U(t) = 2U^+(t)$ с собственным сопротивлением ρ (рис. 1.3).

Разделив, как и ранее, уравнение (1.17) на L , получим обычное уравнение колебаний, но с дополнительным декрементом затухания $\delta_c = \frac{\rho}{2L}$:

$$\ddot{q} + 2(\delta_0 + \delta_c)\dot{q} + \omega_0^2 q = 2\frac{\omega_0}{\rho_0}U^+(t). \quad (1.18)$$

Этот дополнительный декремент затухания описывает связь резонатора с возбуждающей волной и описывает потери энергии излучаемой резонатором в линию. Он определяет так называемую нагруженную добротность

$$Q_c = \frac{\omega_0}{2\delta_c}. \quad (1.19)$$

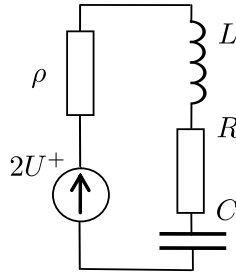


Рис. 1.3: Эквивалентная схема колебательного контура, соединенного с длинной линией на рис. 1.2

Соотношение нагруженной и собственной добротности играет важнейшую роль в динамике резонаторов. Суммарная добротность Q определяется полным декрементом затухания $\delta = \delta_0 + \delta_c$:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (1.20)$$

и связана с собственными потерями и с потерями нагрузки следующими соотношениями:

$$\frac{1}{Q} = 2 \frac{\delta_0 + \delta_c}{\omega_0} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_c}, \quad (1.21)$$

Величина 2δ определяет ширину резонансной кривой или полосу фильтра, построенного на основе такого резонатора. Заметим, что наличие потерь связанных с нагрузкой резонатора отрицает существование резонаторов с бесконечной добротностью. Чтобы резонатор можно было возбудить, он должен иметь потери и конечную добротность.

1.3 Укороченные уравнения

Для теоретического анализа высокочастотных колебаний удобно использовать так называемые укороченные уравнения. Приближение, используемое для вывода этих уравнений, эквивалентно приближению вращающейся волны, широко используемому в оптике и квантовой механике.

Пусть $U^+(t) = \tilde{U}^+(t)e^{-i\omega t}$, где $\tilde{U}^+(t)$ – медленно изменяющаяся по сравнению с периодом колебаний $2\pi/\omega$ амплитуда напряжения накачки колебательного контура. Если потери в контуре малы и амплитуда колебаний мало изменяется за один период колебаний, $\delta \ll \omega_0$, можно перейти к укороченному уравнению для медленно меняющихся амплитуд $a(t)$. Полагая $q(t) = a(t)e^{-i\omega t}$ и пренебрегая членами, пропорциональными \ddot{a} и $\delta\dot{a}$, мы приводим (1.18) к виду:

$$2i\omega\dot{a}(t) + 2\delta i\omega a(t) + (\omega^2 - \omega_0^2)a(t) = -\frac{\omega_0}{\rho_0} 2\tilde{U}^+(t). \quad (1.22)$$

Если теперь положить, что $\omega - \omega_0 \sim \delta \ll \omega_0$ – отстройка сравнима с шириной линии и $\omega^2 - \omega_0^2 \simeq 2\omega(\omega - \omega_0)$, получим:

$$\dot{a}(t) + [\delta - i(\omega - \omega_0)]a(t) = i\frac{1}{\rho_0}\tilde{U}^+(t). \quad (1.23)$$

При выключении накачки колебания начинают затухать, а их амплитуда уменьшаться в соответствии с соотношением

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t + i(\omega - \omega_0)t}. \quad (1.24)$$

При этом мощность затухает как

$$|a(t)|^2 = |a_0|^2 e^{-2\delta t} = |a_0|^2 e^{-t/\tau^*}. \quad (1.25)$$

Величина $\tau^* = \frac{1}{2\delta}$ называется временем звона.

Другое определение добротности связано с энергетическими характеристиками колебаний:

$$Q = \frac{\omega_0 \mathcal{E}}{\mathcal{P}}, \quad (1.26)$$

где \mathcal{E} – энергия, запасенная в резонаторе, а \mathcal{P} – рассеиваемая мощность. Если $\mathcal{E} \propto |a(t)|^2$, то $\mathcal{P} = -\partial\mathcal{E}/\partial t \propto |a(t)|^2/\tau^*$. Следовательно,

$$Q = \omega_0 \tau^*, \quad (1.27)$$

что эквивалентно первому определению добротности (1.20). Соотношения (1.20) и (1.27) используются для непосредственного измерения добротности резонаторов либо по времени затухания τ^* выходной мощности при резком выключении накачки, либо по ширине резонансного отклика 2δ .

1.4 Критическая связь

Рассмотрим стационарное решение выведенного уравнения колебаний (1.23) при накачке на резонансной частоте ($\omega = \omega_0$):

$$a = \frac{i\tilde{U}^+}{\delta\rho_0}. \quad (1.28)$$

Это решение дает амплитуду колебаний заряда на емкости, а значит, энергия, запасаемая в контуре, равна:

$$\mathcal{E} = \frac{|a|^2}{2C} = \frac{\tilde{U}^{+2}(t)}{2\delta^2\rho_0^2 C} = \frac{\tilde{U}^{+2}(t)}{\rho\delta^2} \frac{\rho}{2L} = \frac{\delta_c}{(\delta_0 + \delta_c)^2} \mathcal{P}^+. \quad (1.29)$$

Здесь учтено, что мощность падающей волны $\mathcal{P}^+ = \tilde{U}^{+2}(t)/\rho$. Дифференцируя это выражение по δ_c можно найти, что при заданной мощности энергия в контуре максимальна, когда $\delta_c = \delta_0$. Этот режим называется критической связью.

Найдем коэффициент отражения (1.15) вблизи резонанса:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u &= \frac{Z - \rho}{Z + \rho} = \frac{-i\omega L - \frac{1}{i\omega C} + R - \rho}{-i\omega L - \frac{1}{i\omega C} + R + \rho} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega(2\delta_0 - 2\delta_c)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega(2\delta_0 + 2\delta_c)} \\ &\simeq \frac{\delta_0 - \delta_c - i(\omega - \omega_0)}{\delta_0 + \delta_c - i(\omega - \omega_0)}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

В пособии используется временная зависимость вида $e^{-i\omega t}$, как в квантовой механике и во многих современных книгах по оптике, в радиофизике же обычно используется зависимость вида $e^{i\omega t}$, поэтому знаки импедансов могут показаться непривычными. Выписанное выражение является характерным выражением для отклика резонансного фильтра первого порядка.

При резонансной накачке $\omega = \omega_0$, получим для коэффициента отражения по мощности:

$$\mathcal{R}_P = \mathcal{R}_u^2 = \frac{(1 - \delta_c/\delta_0)^2}{(1 + \delta_c/\delta_0)^2}. \quad (1.31)$$

Т. е. при $\delta_0 = \delta_c$ коэффициент отражения обращается в нуль и вся падающая мощность поглощается в резонаторе.

Задание 2. *Найдите зависимость от частоты фазы отраженной волны вблизи резонанса. Покажите, что крутизна фазовой характеристики стремится к бесконечности при $\delta_c \rightarrow \delta_0$. Объясните полученный результат.*

Итак, на примере колебательного контура с сосредоточенными параметрами мы ввели большинство параметров используемых в описании резонаторов. В следующей части мы обсудим распределенные колебательные системы.

1.5 Низкочастотные распределенные системы

Распределенной системой является физическая система, размеры которой сравнимы с характерной длиной волны электромагнитного поля в ней. Одним из простейших примеров распределенной системы, с которой мы уже в этой главе столкнулись, является длинная линия.

Простейший идеальный распределенный резонатор – это отрезок длинной линии. Его аналогия в оптике – резонатор Фабри-Перо. Рассмотрим отрезок линии длиной d . На разомкнутых концах линии ток равен нулю. Поскольку

$$I = (I^+ e^{i\beta z} + I^- e^{-i\beta z}) e^{-i\omega t}, \quad (1.32)$$

это возможно, если $I^+ = -I^-$ при $z = 0$ и

$$\sin \beta d = 0, \quad (1.33)$$

что достигается, если ток в линии имеет резонансные частоты

$$\omega_m = \frac{\pi m}{d\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}}, \quad (1.34)$$

здесь m – целое число определяющее номер моды колебаний. Величина характеризующая частотную отстройку одной моды от другой,

$$\omega_{\text{осд}} = \frac{\partial \omega_m}{\partial m} = \frac{\pi}{d\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}} \quad (1.35)$$

называется областью свободной дисперсии резонатора(ОСД). Основное отличие распределенной системы от системы с сосредоточенными параметрами состоит в наличии бесконечного числа мод в системах с распределенными параметрами и только одной моды в системе с сосредоточенными параметрами.

1.6 Объемные резонаторы

Объемным резонатором электромагнитных волн является устройство, в котором из-за граничных условий образуется стоячая или бегущая по замкнутому пути волна, амплитуда которой затухает при отсутствии подкачки энергии за время много большее периода колебаний. В отличие от устройств с сосредоточенными параметрами типа колебательного контура или полуволнового отрезка длинной линии, в объемном резонаторе все размеры порядка или много больше длины волны в среде, заполняющей резонатор. Свойства объемного резонатора определяются свойствами его границ и заполняющей среды. Поля в резонаторе описываются уравнениями Максвелла с соответствующими граничными условиями.

Радиочастотный колебательный контур с сосредоточенными параметрами работает до мегагерцового частотного диапазона, а его размеры на много порядков меньше длины волны. Для того чтобы получить резонансный элемент в гигагерцовом и терагерцовом диапазоне, очевидно, надо радикально увеличить резонансную частоту, а следовательно уменьшить индуктивность и емкость. Уменьшить индуктивность можно уменьшив сначала до одного количество витков катушки, а затем взяв большое количество таких одинарных витков, соединенных параллельно. Из этих витков мы сделаем стенки резонатора. Сохраним при этом форму конденсатора, раздвинув слегка обкладки, разместив их на близко расположенных торцах внутренних цилиндров, получится резонатор с сосредоточенной емкостью (рис. 1.4). Как и в колебательном контуре, дважды за период вся энергия в таком резонаторе сосредотачивается в емкостном зазоре в виде энергии электрического поля. Через четверть периода энергия

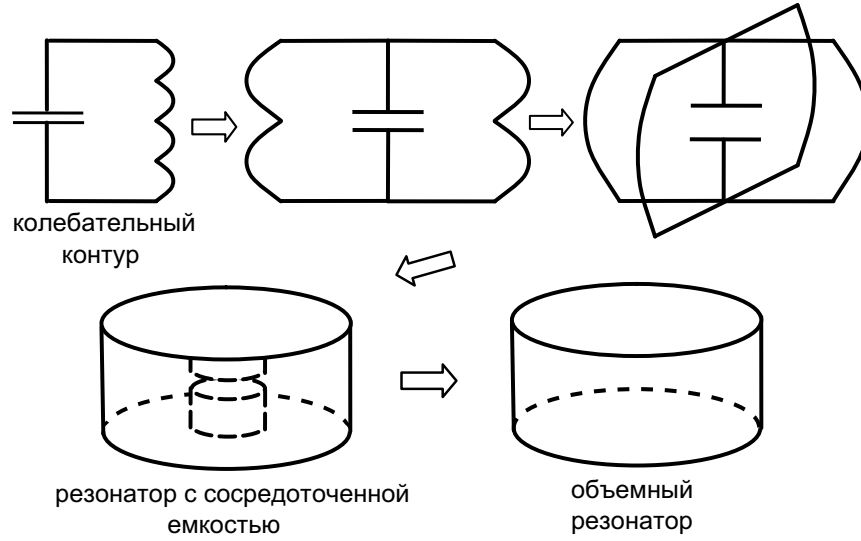


Рис. 1.4: Превращение колебательного контура в резонатор с сосредоточенной емкостью и в объемный резонатор

распределяется по объему резонатора в магнитном поле. Такой резонатор обладает целым рядом интереснейших свойств. В частности, именно с помощью такого резонатора была достигнута рекордная координатная чувствительность. Однако такой резонатор пригоден лишь для СВЧ диапазона, для оптики он не годится. Если мы уменьшим и емкость, раздвигая обкладки и ликвидируя емкостной зазор, мы в конце концов получим простейший цилиндрический объемный резонатор.

Поле в объемном резонаторе можно представить в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(t)\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [a(t)e^{-i\omega t} + a^*(t)e^{i\omega t}] \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}). \quad (1.36)$$

При этом временная часть $E(t)$ подчиняется дифференциальному уравнению колебаний, как и заряд в обычном контуре. Медленно изменяющаяся амплитуда $a(t)$ обычно подчиняется укороченному уравнению в приближении вращающейся волны. Пространственное распределение удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \mathbf{e}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.37)$$

Уравнение Гельмгольца порождает в замкнутом объеме ортогональные собственные решения, которые мы будем называть электромагнитными модами резонатора, а соответствующие дискретные частоты этих мод – собственными частотами. Мы уже столкнулись с модами, обсуждая собственные колебательные частоты длинной линии. Для описания свойств резонатора удобно выбрать систему ортонормированных мод, так чтобы

$$\int \mathbf{e}_i(\mathbf{r})\mathbf{e}_j^*(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{ij}, \quad (1.38)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Ортогональность мод справедлива только для идеального закрытого резонатора без потерь, изолированного от окружающего пространства. Таких резонаторов, очевидно, в природе не существует. При наличии внутренних потерь и излучения в окружающее пространство интегралы по объему могут расходиться, моды становятся неортогональными, а частоты комплексными. Более того, и само понятия моды уже нельзя определить как собственные решения системы. Тем не менее, если добротность резонатора велика, подход ортогональных мод является обычно хорошим приближением. В этом случае часто говорят о квазинормальных модах. Под модами резонатора мы будем в этом случае понимать такие колебания в системе, вид которых точно воспроизводится в свободной системе через период колебаний. При этом из-за затухания коэффициент ослабления за период равен $e^{-\delta T} = e^{-\pi/Q}$.

Полезно ввести величину, называемую эффективным объемом моды. Это такой объем, который занимало бы поле величиной равной максимальной и с той же энергией, если бы оно было распределено по этому объему равномерно.

$$V_{eff} = \frac{\int \epsilon |\mathbf{e}(\mathbf{r})|^2 dV}{\max(\epsilon |\mathbf{e}(\mathbf{r})|^2)} \quad (1.39)$$

Эффективный объем обычно меньше физического объема резонатора.

Задание 3. Рассмотрите резонатор в форме параллелепипеда с металлическими стенками. Покажите, что $V_{eff} = \frac{d_x d_y d_z}{8} = \frac{V}{8}$.

Иногда удобно использовать другую нормировку мод, менее удобную с точки зрения математики, но более физически наглядную

$$\max |\mathbf{e}_m(\mathbf{r})|^2 = 1, \quad (1.40)$$

тогда $V_{eff} = \int |\mathbf{e}_m(\mathbf{r})|^2 dV$. Амплитуда a будет в этом случае иметь смысл максимальной амплитуды электрического поля в резонаторе. Для приложений квантовой механики удобна нормировка

$$\int \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} |\mathbf{e}_n(\mathbf{r})|^2 dV = \hbar \omega, \quad (1.41)$$

где \hbar – постоянная Планка, и тогда амплитуде a можно придать смысл оператора уничтожения фотонов, а $|a|^2$ соответствует числу фотонов в резонаторе.

Выбор нормировки будем далее в каждом случае оговаривать.

Естественно предположить, что минимальный размер резонатора должен быть сравним с кубом длиной волны поля, сконцентрированного в этом резонаторе.

Объемные резонаторы простейшего типа широко применяются в СВЧ технике. К сожалению, для оптики простые объемные резонаторы с металлическими стенками не годятся. Это легко понять. Если размеры резонатора порядка длины волны, это значит, что за время порядка периода колебаний электромагнитная волна в резонаторе сталкивается с его стенками. Поскольку коэффициент отражения оптической волны

от поверхности металла не лучше 0.8-0.9, это означает, что добротность будет невелика. Следовательно, необходимо, чтобы волна сталкивалась со стенками как можно реже, чего можно добиться лишь увеличением размера резонатора и улучшением коэффициента отражения. Таким образом, слишком короткие оптические резонаторы с размерами порядка длины волны с высокой добротностью получить не удается.

Одним из решений является создание многомодового резонатора, в котором только ограниченное число мод обладают заданной добротностью, а остальные моды низкодобротны. При создании квантового генератора А.М.Прохоров в 1958 г. предложил использовать открытый квазиодномерный резонатор, высокодобротные колебания в котором получаются вследствие многократных отражений электромагнитной волны от системы зеркал, то есть резонатор типа интерферометра Фабри-Перо. Размеры такого резонатора достаточно велики в одном выделенном направлении, а в остальных могут быть малыми, сравнимыми с длиной волны. Как показали Фокс и Ли, только моды, распространяющиеся в этом выделенном направлении обладают большой добротностью, а остальные быстро затухают благодаря сильному росту дифракционных потерь на оконечных зеркалах конечного размера. Тем самым наряду с континуумом низкодобротных мод в таком резонаторе существует набор дискретных мод с высокой добротностью.

1.7 Классические оптические резонаторы

Простейшим резонатором с разряженным за счет дифракционных потерь спектром является резонатор Фабри-Перо, подробному рассмотрению которого будет посвящена Глава 3. Это резонатор, образованный двумя зеркалами, расположенными на расстоянии d . Зеркала обладают коэффициентом отражения по мощности \mathcal{R} .

Добротность резонатора типа Фабри-Перо выражается следующим соотношением:

$$Q = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{1 - \mathcal{R}} kd, \quad (1.42)$$

здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

В соответствии с выражением (1.42) при тех же зеркалах добротность резонатора прямо пропорциональна длине.

Современная технология изготовления многослойных диэлектрических покрытий и прецизионной полировки позволила получить зеркала с коэффициентом отражения $1 - \mathcal{R} = 1.6 \times 10^{-6}$ (так называемые “суперзеркала”). Добротность в резонаторе типа Фабри-Перо с характерной длиной порядка 4 мм с такими зеркалами на длине волны $\lambda = 0.85$ мкм составляет $Q = 2 \times 10^{10}$. Однако такие зеркала не лишены недостатков. Получаемые диэлектрические суперпокрытия весьма чувствительны к внешним влияниям и быстро деградируют при обычных условиях. Эти покрытия узкополосны, т.е. хорошо отражают излучение только в узкой полосе вблизи заданной длины волны. Резонаторы Фабри-Перо малого размера чрезвычайно чувствительны к акустическим

колебаниям, что осложняет их использование в большинстве прецизионных экспериментов. Кроме технических ограничений добротность обычных квазиодномерных оптических резонаторов связана прямой пропорциональностью с их линейными размерами. Это вступает в противоречие как с потребностями экспериментальной техники – необходимостью работать с малым числом квантов и малым объемом локализации поля, так и с потребностями в миниатюризации компонентов, диктуемыми развитием волоконной и интегральной оптики.

1.8 Резонаторы с модами шепчущей галереи

Большая часть настоящего пособия посвящена свойствам резонаторов с модами шепчущей галереи (МШГ). Резонаторы с МШГ вполне могут стать следующим поколением резонаторов после резонаторов Фабри-Перо в микрооптике, подобно тому, как твердотельная схмотехника пришла на смену электровакуумным приборам в радиоэлектронике. Резонаторы с МШГ начали развиваться в середине прошлого века, хотя сама история МШГ насчитывает около столетия. Такое название моды получили по аналогии с акустическими модами в Шепчущей галерее собора Святого Павла в Лондоне, которые исследовал и объяснил лорд Рэлей.

Впервые на возможность создания электромагнитных резонаторов с использованием МШГ, возникающих при полном внутреннем отражении от поверхности аксиально-симметричного тела, указал в 1939 году Роберт Рихтмайер [1] (один из руководителей американского проекта водородной бомбы). Им был проведен расчет распределения электромагнитных полей внутри и снаружи сферического и тороидального резонаторов – именно такие резонаторы из плавленого кварца получили в настоящее время в оптике наибольшее распространение. Рихтмайер показал, что в открытых диэлектрических резонаторах с модами полного внутреннего отражения принципиальное ограничение на добротность оказывает срыв электромагнитного поля с выпуклой внешней поверхности (радиационная добротность) и привел оценки этого вида потерь. Как оказалось, излучательная добротность экспоненциально растет с ростом отношения радиуса резонатора к длине волны и поэтому не препятствует достижению сколь угодно высоких значений добротности. В теории волноводов такие потери известны как потери на изгибе.

Резонаторы с МШГ СВЧ диапазона получили широкое применение в экспериментальной физике и радиотехнике. Их главной особенностью является высокая добротность, составляющая около 10^8 при температуре жидкого азота и свыше 10^9 при околотеминых температурах (лейкосапфир Al_2O_3 , длина волны $\lambda \sim 3$ см, диаметр резонатора $D \sim 10$ см), которая ограничена СВЧ-поглощением в материале. При уменьшении линейных размеров резонатора на три-четыре порядка и при использовании материала с достаточно малыми собственными потерями оказывается возможным создание высокодобротного оптического диэлектрического микрорезонатора с такими модами. Идея таких резонаторов состоит в том, чтобы радикально уменьшить потери при отражении от границ, перейдя от нормального падения лучей к скользящему.

Наиболее простой формой резонатора, в которой возможны МШГ, является сферическая. Теоретическое исследование взаимодействия сферических частиц с электромагнитными волнами имеет более чем столетнюю историю и начинается с работ Рэлея (1871) по рассеянию света в атмосфере. Большой вклад в разработку теории рассеяния внесли работы многих ученых конца XIX, начала XX века. Но наиболее известны теоретические работы Ми рассмотревшего рассеяние света на сферических частицах с комплексным показателем преломления в среде с потерями и Дебая исследовавшего рассеяние на шаре в виде ряда по преломленным и отраженным волнам различного порядка. В рамках теории Ми вычисляется матрица рассеяния плоской линейно поляризованной электромагнитной волны при ее падении на тело сферической формы в виде сложного ряда специальных функций (см. главу 6). Полусы матрицы рассеяния соответствуют собственным модам диэлектрической сферы, что стало понятно лишь в наше время. Дебай, по-видимому первый обнаружил существование мод свободных колебаний диэлектрической сферы.

В оптическом диапазоне МШГ впервые косвенно наблюдались еще в 1961 г. по снижению порога лазерной генерации в шариках диаметром 1-2 мм из флюорита (CaF_2), активированного ионами Sm^{2+} . Интересно, что именно флюорит в настоящее время наиболее широко применяется при создании дисковых оптических микрорезонаторов в которых была продемонстрирована наибольшая добротность.

В конце 70-х годов был обнаружен эффект сверхтонкого оптического резонанса ранее предсказанный Ирвайном. Этот эффект проявляется в экспериментах по лазерной левитации, оптическому давлению и упругому рассеянию электромагнитных волн на диэлектрических сферических и цилиндрических телах как возникновение узких пиков коэффициента ослабления, рассеяния, поглощения и светового давления при вариациях длины волны падающего излучения и радиусов частиц. Можно отметить, что адекватное описание этих эффектов на основе теории Ми оказалось возможным лишь с появлением быстродействующих компьютеров и развитых численных методов.

Можно указать на следующие преимущества оптических резонаторов с МШГ по сравнению с традиционными резонаторами типа Фабри-Перо (РФП):

1. Гораздо меньший размер при той же добротности. У РФП добротность линейно зависит от размера, у резонаторов с МШГ излучательные потери падают с размерами экспоненциально. Резонаторы с размером порядка миллиметров могут иметь ту же добротность, что РФП длиной в десятки сантиметров.

2. Широкий диапазон частот в котором сохраняется высокая добротность резонаторов с МШГ. Высокодобротные резонаторы Фабри-Перо требуют использование суперзеркал, которые могут работать только в узком интервале частот.

3. Малая чувствительность твердотельных микрорезонаторов с МШГ к механическим воздействиям. У РФП требуется предпринимать специальные меры для обеспечения большой механической жесткости.

Можно указать и на следующие недостатки резонаторов с МШГ по сравнению с РФП:

1. Зеркала РФП можно закрепить на корпусе из материала с очень низким коэффициентом теплового расширения (инвар, суперинвар, ковар, ситалл, церодур, темпера-

турно-компенсированные стекла), тогда как тепловое расширение резонатора МШГ задается материалом резонатора. Поэтому резонаторы с МШГ больше подвержены тепловым флуктуациям. С другой стороны, миниатюрный резонатор ШГ проще разместить в стабилизированном термостате, чем крупный РФП.

2. В резонаторах ФП свет большую часть времени распространяется в воздухе или в вакууме, что делает их нечувствительными к различным эффектам, связанным с материалом – нелинейность, термодинамические флуктуации, потери, дефекты.

В 1982 году В.Б.Брагинским было предложено для проведения квантово-невозмущающих измерений использовать оптические микрорезонаторы на эффекте полного внутреннего отражения в виде тороидального кварцевого резонатора, образованного закольцованным оптическим волокном. Эта идея стимулировала разработку оптических микрорезонаторов на физическом факультете МГУ и в 1989 году на кафедре физики колебаний были впервые продемонстрированы подобные сферические оптические микрорезонаторы с МШГ, изготовленные из плавленого кварца [2].

В 2003 году были продемонстрированы тороидальные кварцевые микрорезонаторы, изготавливаемые методами кремниевой микроэлектроники с последующим формованием с помощью CO_2 излучения [3]. Позже были разработаны и продолжают совершенствоваться разнообразные технологичные резонаторы, также основанные на идее МШГ, изготавливаемые с использованием технологий современной кремниевой электроники.

Развитием идеи стали оптические резонаторы с МШГ, вытравливаемые из кристаллических материалов [4].

Чрезвычайно перспективными также являются резонаторы на основе периодических структур с запрещенными зонами, так называемых фотонных кристаллов, которые позволяют получить микрорезонаторы с самым малым эффективным объемом, $V_{\text{эфф}} \sim \left(\frac{\lambda}{2n}\right)^3$ [5].

В настоящее время наблюдается устойчивый рост количества исследований, посвященных оптическим микрорезонаторам. В таблице на рис.1.5 представлено состояние исследований на сегодняшний день. Если говорить о резонаторах с очень высокой добротностью, там где требуется время звона больше 1 мкс, альтернативы резонаторам с модами шепчущей галереи просто нет.

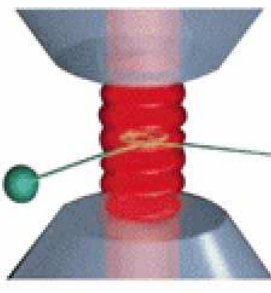
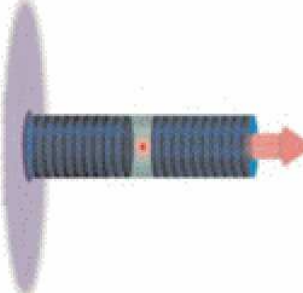
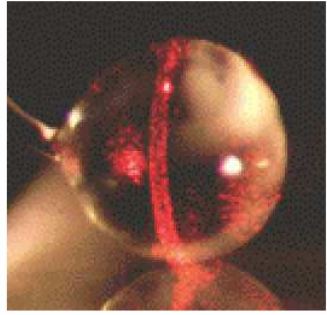
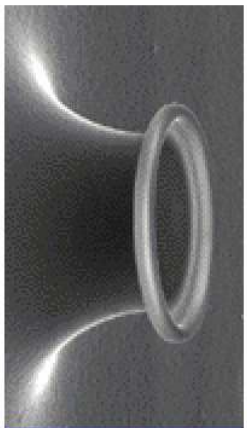
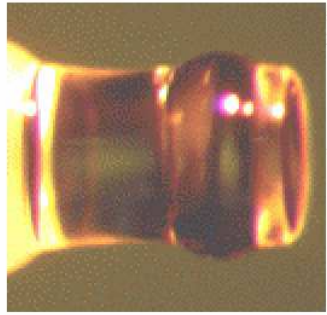
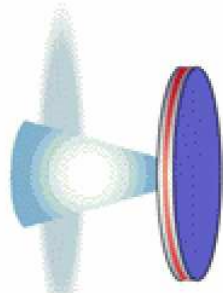

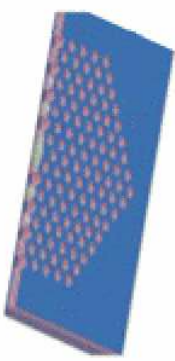
Сверхдобротные $\tau > 1 \mu\text{с}$, $V \geq 1000 \text{ лкм}^3$	Высокодобротные $\tau > 1 \text{ нс}$, $V \sim 1000 \text{ лкм}^3$	Добротные $\tau > 1 \text{ пс}$, $V \sim 1 \text{ лкм}^3$	
	<p>$Q = 10^7$, суперзеркала (Калтех)</p> 	<p>$Q: 2000$</p> 	Фабри-Перо
<p>$Q \leq 8 \times 10^9$, SiO_2 (MIT)</p>  <p>$Q \leq 2 \times 10^8$, SiO_2 (Калтех)</p>  <p>$Q \leq 10^{11}$, CaF_2 (JPL)</p> 		<p>$Q = 5.2 \times 10^5$, Si (Калтех)</p>  <p>$Q_{\text{MIT}} = 7 \times 10^3$ $Q_{\text{not}} = 1.3 \times 10^5$</p> 	Шепчущей галереи
	<p>?</p>	<p>$Q = 6 \times 10^5$, Si (Университет Киото)</p> 	Фотонные кристаллы

Рис. 1.5: Типы оптических микрорезонаторов.

Литература

- [1] R. D. Richtmyer. Dielectric resonators. *Journal of Applied Physics*, 10:391–398, 1939.
- [2] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, and V. S. Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering gallery modes. *Physics Letters A*, 137:393–397, 1989.
- [3] D. K. Armani, T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala. Ultra-high-Q toroid microcavity on a chip. *Nature*, 421:925–928, 2003.
- [4] A. A. Savchenkov, V. S. Ilchenko, A. B. Matsko, and L. Maleki. Kiloherz optical resonances in dielectric crystal cavities. *Physical Review A*, 70:051804, 2004.
- [5] B.-Sh. Song, S. Noda, T. Asano, and Y. Akahane. Ultra-high-Q photonic double-heterostructure nanocavity. *Nature Materials*, 4:207–210, 2005.