

Спецкурс “Оптические микрорезонаторы”.  
Лекция 5. Моды диэлектрического шара

М.Л.Городецкий

15 апреля 2008 г.

## 1 Волны в сферических координатах

В сферических координатах  $(r, \theta, \phi)$  с параметрами Ламэ  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$  и  $h_\phi = r \sin \theta$  основные векторные операторы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (1) \\
 \nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 U_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} \\
 \nabla \times \mathbf{U} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta U_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r U_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r U_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \\
 \nabla^2 u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Вводя, как это было описано во второй Главе, вектора  $\mathbf{M}_{lm}$  и  $\mathbf{N}_{lm}$ , получаемые из решения скалярного волнового уравнения  $\psi_{lm}$  с использованием векторной функции  $\mathbf{f} = \mathbf{r}$  (такие векторные потенциалы называются потенциалами Дебая), можно получить полное решение векторного волнового уравнения в сферических координатах.

Двумя независимыми соленоидальными решениями являются векторные функции:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \nabla \times (\mathbf{r}\psi) = -i\hat{\mathbf{L}}\psi \\
 \mathbf{N} &= \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi) = -\frac{i}{k} \nabla \times \hat{\mathbf{L}}\psi \quad (3)
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, а  $\hat{\mathbf{L}} = i\mathbf{r} \times \nabla$  – оператор углового момента. Вектора  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  взаимно ортогональны и образуют базис. Векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  – соленоидальны ( $\nabla \cdot (\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 0$ ). Общеприняты обозначения:

H-тип (поперечно электрические ТЕ-моды),  $\mathbf{E} \sim \mathbf{M}$ ,  $E_r = 0$

E-тип (поперечно магнитные ТМ-моды),  $\mathbf{E} \sim \mathbf{N}$ ,  $H_r = 0$

Решением скалярного уравнения Гельмгольца в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (4)$$

являются функции вида:

$$\psi_{\ell m} = AY_{\ell m}(\theta, \phi)w_{\ell}(kr) \quad (5)$$

где  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  – шаровая сферическая функция, обычно нормируемая на единицу:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) d\phi d\theta = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = C_{\ell m} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$C_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}, \quad (6)$$

$P_{\ell}^m$  – присоединенные полиномы Лежандра,  $w_{\ell}(kr)$  – радиальная сферическая функция. Натуральный индекс  $\ell$  будем называть полярным индексом или номером моды (в приближении волновой оптики он соответствует числу длин волн укладываемых на большом круге резонатора  $\ell \simeq 2\pi na/\lambda$ ), целое число  $m$  – азимутальным индексом. Волны  $e^{i|m|\phi}$  и  $e^{-i|m|\phi}$  соответствуют двум вырожденным модам, бегущим по окружности резонатора в противоположных направлениях.

## 2 Сферические функции

### 2.1 Радиальные функции

Сферические радиальные функции  $w_m(z)$  удовлетворяют уравнению:

$$w'' + \frac{2}{x} w' + \left(1 - \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2}\right) w = 0. \quad (7)$$

Заменой переменных

$$w_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} f(x) \quad (8)$$

уравнение превращается в уже рассмотренное уравнение для цилиндрической функции Бесселя полуцелого номера  $f(x) = Z_{\ell+1/2}(x)$ . Поэтому основные свойства сферических функций следуют из свойств цилиндрических функций Бесселя.

Также, как и в цилиндре, общим решением скалярного уравнения Гельмгольца является линейная комбинация двух сферических функций, каждая из которых, естественно, также подчиняется уравнению (7):

$$w_\ell(x) = C_j j_\ell(x) + C_y y_\ell(x). \quad (9)$$

Здесь  $j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x)$  – сферическая функция Бесселя, которая ограничена в нуле  $j_\ell(0) = \delta_{0\ell}$ , а  $y_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\ell+1/2}(x)$  – сферическая функция второго рода (Неймана), которая при приближении к нулю стремится к минус бесконечности. Вдали от нуля это осциллирующие ограниченные функции.

Сферические радиальные функции третьего рода – сферические первые и вторые функции Ханкеля вводятся по аналогии с цилиндрическими координатами:

$$\begin{aligned} h_\ell^{(1)}(x) &= j_\ell(x) + iy_\ell(x) \\ h_\ell^{(2)}(x) &= j_\ell(x) - iy_\ell(x) \end{aligned} \quad (10)$$

На бесконечности сферические функции третьего рода ведут себя как сферические расходящиеся волны.

$$\begin{aligned} j_\ell(x) &\approx \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right) \\ y_\ell(x) &\approx -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right) \\ h_m^{(1)}(x) &\approx \frac{-i}{x} e^{i(x-\ell\pi/2)} \\ h_m^{(2)}(x) &\approx \frac{i}{x} e^{-i(x-\ell\pi/2)} \end{aligned} \quad (11)$$

Как и в случае цилиндрических функций Бесселя и Неймана, первый нуль сферических функций с большим номером появляется при значениях аргумента близких к  $\ell + 1/2$ , при этом приближения для нулей получаются те же, что и для цилиндрических с формальной заменой  $m$  на  $\nu = \ell + 1/2$ . В этой области хорошо работают приближения, использующие функции Эйри:

$$\begin{aligned} j_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} \text{Ai}\left[\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} (\nu - x)\right] + O(\ell^{-1}) \\ y_\ell(x) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} \text{Bi}\left[\left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} (\nu - x)\right] + O(\ell^{-1}) \end{aligned} \quad (12)$$

Эти приближения хороши для описания поля внутри резонатора около поверхности.

Для больших значений номера и аргумента, когда  $x < \nu$  можно пользоваться аппроксимациями Дебая:

$$\begin{aligned}
j_m(x) &\simeq \frac{e^{-\nu u}}{2\sqrt{xs}}[1 + O(x^{-1})] \\
y_m(x) &\simeq -\frac{e^{\nu u}}{\sqrt{xs}}[1 + O(x^{-1})] \\
j'_m(x) &\simeq \frac{s}{x}j_m(x)[1 + O(x^{-1})] \\
y'_m(x) &\simeq -\frac{s}{x}y_m(x)[1 + O(x^{-1})] \\
u &= -\frac{s}{\nu} + \text{Arth} \frac{s}{\nu} \\
s &= \sqrt{\nu^2 - x^2}
\end{aligned} \tag{13}$$

Этими приближениями можно пользоваться для описания выпадающего поля вне резонатора около его поверхности.

Ниже приводятся основные свойства сферических функций, часто используемые при аналитических преобразованиях [1, 2]:

$$w'_\ell = \frac{\ell}{x}w_\ell - w_{\ell+1} = -\frac{\ell+1}{x}w_\ell + w_{\ell-1} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
w_{\ell-1} + w_{\ell+1} &= \frac{2\ell+1}{x}w_\ell \\
\int w_\ell^2 x^2 dx &= \frac{x^3}{2} [w_\ell^2 - w_{\ell-1}w_{\ell+1}] = \frac{x^3}{2} \left[ w_\ell'^2 + \frac{x^2 - \ell(\ell+1)}{x^2} w_\ell^2 + \frac{1}{x} w'_\ell w_\ell \right] \\
W(j_\ell, y_\ell) &\equiv j_\ell(x)y'_\ell(x) - j'_\ell(x)y_\ell(x) = \frac{1}{x^2}
\end{aligned} \tag{15}$$

Следует заметить, что сферические функции, вообще говоря, проще цилиндрических функций, поскольку явно выражаются через элементарные:

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x} \\
j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \\
y_0(x) &= -\frac{\cos x}{x} \\
y_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\
j_\ell(x) &= x^\ell \left[ -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^\ell \frac{\sin x}{x} \\
y_\ell(x) &= -x^\ell \left[ -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^\ell \frac{\cos x}{x}
\end{aligned} \tag{16}$$

## 2.2 Функции Рикати-Бесселя

В теории рассеяния на сфере (теория Ми) также часто используются функции Рикати-Бесселя, определяемые через обычные сферические функции следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi_\ell(x) &= xj_\ell(x) \\ \chi_\ell(x) &= -xy_\ell(x) \\ \zeta_\ell(x) &= \psi_\ell(x) - i\chi_\ell(x) = xh_\ell^{(1)}(x),\end{aligned}\quad (17)$$

через них запись некоторых выражений получается проще. Функции Рикати-Бесселя подчиняются дифференциальному уравнению:

$$w'' + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]w = 0 \quad (18)$$

На бесконечности эти функции превращаются в простой синус и косинус.

$$\begin{aligned}\psi'_\ell &= \psi_{\ell-1} - \frac{\ell}{x}\psi_\ell = \frac{(\ell+1)}{x}\psi_\ell - \psi_{\ell+1} \\ W(\psi_\ell, \chi_\ell) &\equiv \psi_\ell(x)\chi'_\ell(x) - \psi'_\ell(x)\chi_\ell(x) = -1\end{aligned}\quad (19)$$

## 2.3 Угловые сферические функции

Присоединенные функции Лежандра  $P_\ell^m(\eta)$  подчиняются уравнению:

$$(1 - \eta^2)w'' - 2\eta w' + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2}\right]w = 0 \quad (20)$$

Обычно присоединенные функции Лежандра выводят из полиномов Лежандра  $P_\ell(\eta)$ , уравнение для которых получается из приведенного выше при  $m = 0$ . Они определяются формулой Родрига [2]:

$$\begin{aligned}P_\ell(\eta) &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\eta^\ell} (\eta^2 - 1)^\ell, \\ P_\ell^m(\eta) &= (-1)^m (1 - \eta^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(\eta)}{d\eta^m}.\end{aligned}\quad (21)$$

Явные выражения для присоединенных полиномов малого порядка имеют вид:

$$\begin{aligned}P_0^0(x) &= 1 & P_1^0(x) &= x & P_2^0(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_1^1(x) &= -(1 - x^2)^{1/2} & P_2^1(x) &= -3x(1 - x^2)^{1/2} & P_2^2(x) &= 2(1 - x^2)\end{aligned}\quad (22)$$

В определении присоединенных функции Лежандра часто не используется фазовый множитель Кондона-Шортли  $(-1)^m$  (например, в справочнике [1]), введение которого однако упрощает рассмотрение теории углового момента в квантовой механике.

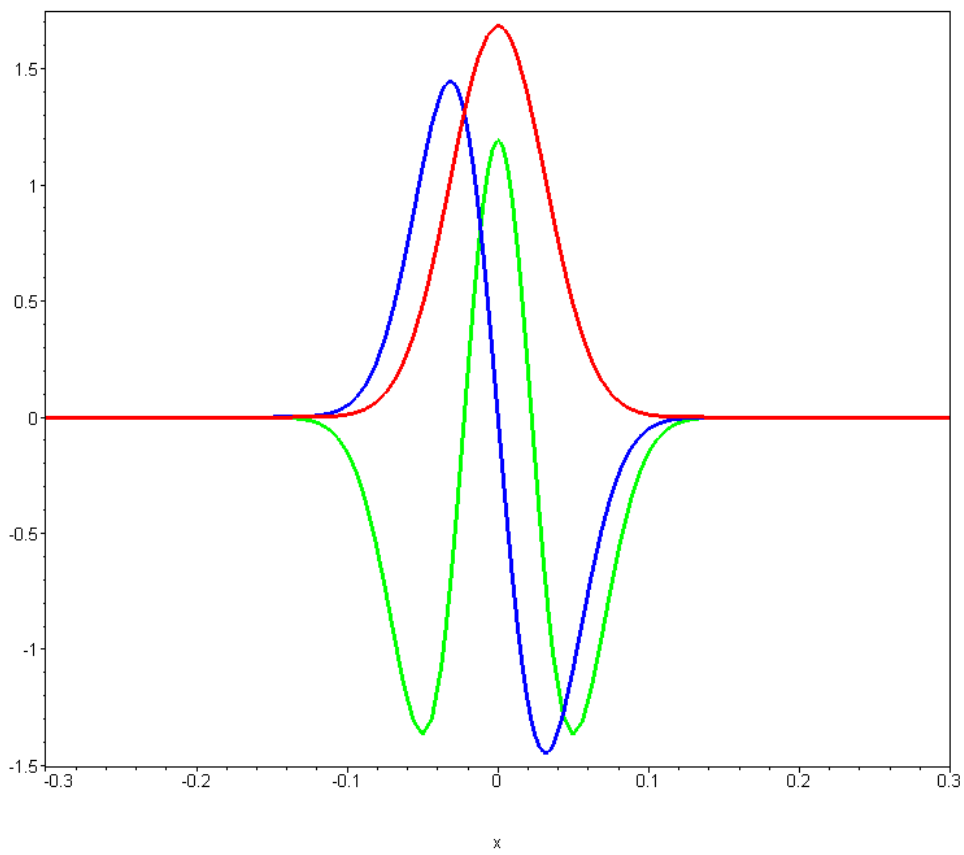


Рис. 1: Нормированные присоединенные функции Лежандра  $C_{\ell m} P_{\ell}^m(\eta)$  для  $\ell = 1000$ ,  $\ell - m = 0, 1, 2$ .

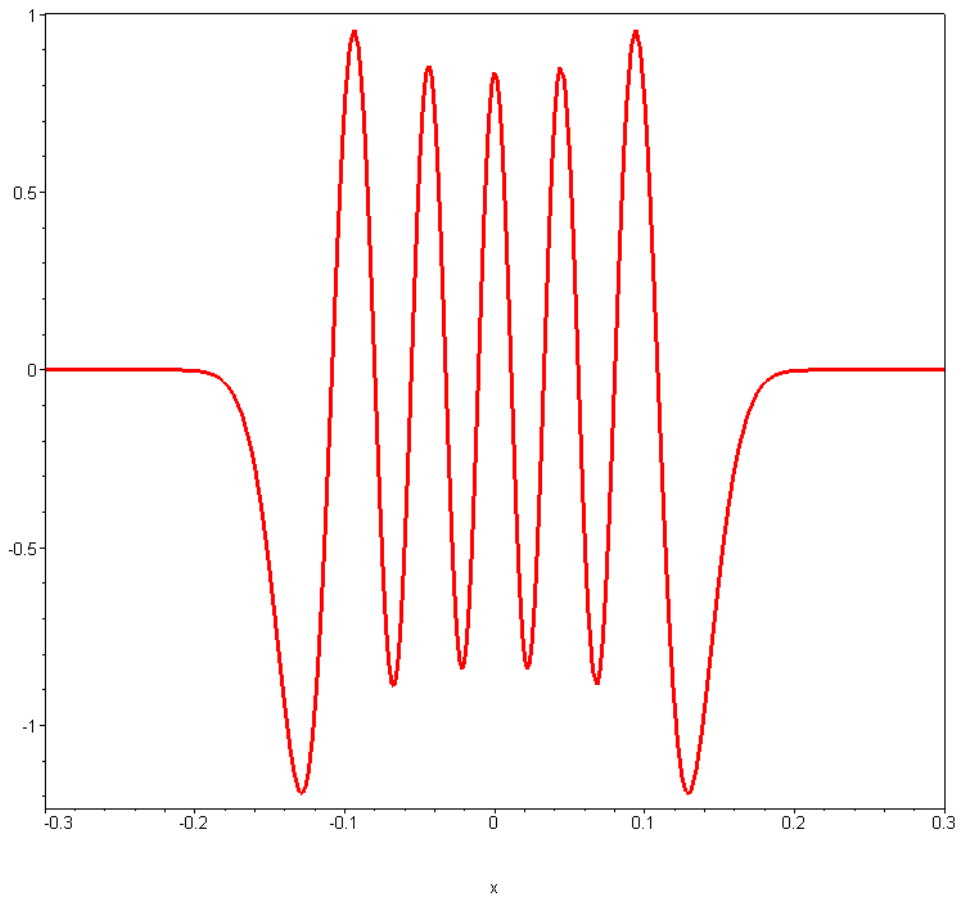


Рис. 2: Нормированная присоединенная функция Лежандра  $C_{lm} P_l^m(\eta)$  для  $l = 1000$ ,  $l - m = 10$ .

Для вычисления интегралов перекрытия в теории мод сферических резонаторов полезны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_\ell^m(\eta) P_{\ell'}^{m'}(\eta) d\eta &= \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{mm'} \\ \int_{-1}^1 P_\ell^m(\eta) P_{\ell'}^m(\eta) d\eta &= \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'} \\ \int_{-1}^1 P_\ell^m(\eta) P_{\ell'}^{m'}(\eta) \frac{1}{1-\eta^2} d\eta &= \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!} \delta_{mm'}\end{aligned}\quad (23)$$

Использование функций Лежандра в традиционной форме в расчетах для мод высокого порядка не очень удобно из-за входящих в их выражение факториалов больших чисел, что приводит к гигантским численным множителям. Проще применять нормированные угловые сферические функции  $Y_{\ell m}$ .

В теории мод шепчущей галереи наибольшую роль играют моды, описываемые присоединенными функциями Лежандра у которых  $m = \ell$ , которые мы будем далее называть фундаментальными модами:

$$Y_{\ell\ell}(\theta, \phi) = (-1)^\ell C_{\ell\ell}(2\ell-1)!! (\sin\theta)^\ell e^{i\ell\phi}, \quad (24)$$

где двойной факториал числа означает в зависимости от четности этого числа произведение всех четных или нечетных чисел до него:

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot 2n = 2^n n! \\ (2n-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 4 \dots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n^2}.\end{aligned}\quad (25)$$

Разлагая  $\sin\theta$  вблизи экваториальной плоскости в ряд Тейлора, беря в разложении Стирлинга для факториала

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\right) \quad (26)$$

только первый член и пользуясь известным пределом  $(1+x/\ell)^\ell \rightarrow e$ , получаем:

$$Y_\ell^\ell = (-1)^\ell \left(\frac{\ell}{4\pi^3}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{(\pi/2 - \theta)^2}{2}\right)^\ell \simeq (-1)^\ell \left(\frac{\ell}{4\pi^3}\right)^{1/4} e^{-\ell(\pi/2 - \theta)^2/2}. \quad (27)$$

Для мод у которых  $\ell \gg p$ , где  $p = \ell - m$  небольшое число порядка 1 можно пользоваться конечным рядом [1]:

$$\begin{aligned}P_\ell^m(\eta) &= (-1)^p P_\ell^{\ell-p}(\eta) \frac{1}{p!} (1-\eta^2)^{-p/2} \left[ \eta^p - \frac{p(p-1)}{2 \cdot (2\ell-1)} \eta^{p-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2\ell-1)(2\ell-3)} \eta^{p-4} - \dots \right],\end{aligned}\quad (28)$$



но удобнее в этом случае следующее приближение, связывающая присоединенные функции Лежандра с функциями Эрмитта:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) \simeq (-1)^m \left( \frac{\ell}{4\pi^3} \right)^{1/4} H_p(\ell^{1/2}(\theta')) \frac{1}{\sqrt{2^p p!}} e^{-m\theta'^2/2} e^{im\phi}, \quad (29)$$

где  $\theta' = \pi/2 - \theta$ . С использованием этой аппроксимации моду можно представить как Гаусс-Эрмиттов пучек, циркулирующий благодаря полному внутреннему отражению в экваториальной плоскости резонатора.

В некоторых случаях для расчета свойств мод с не слишком малым  $\ell - m$  полезно следующее приближение вблизи  $\theta = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} P_\ell^m(\cos \theta) &\simeq c_{\ell m} \cos \left[ \mu\theta' - (\ell - m) \frac{\pi}{2} \right], \\ \mu^2 &= \ell(\ell + 1) - m^2, \\ c_{\ell m} &= (-1)^m \begin{cases} \frac{(\ell+m-1)!!(\ell-m-1)!!}{(\ell-m)!}, & \text{при четных } \ell - m, \\ \frac{(\ell+m)!!(\ell-m)!!}{\mu(\ell-m)!}, & \text{при нечетных } \ell - m. \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

Что, с использованием разложения Стирлинга приводит к простому приближению:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) \simeq (-1)^m \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\ell}{\mu}} \cos \left[ \mu\theta' - (\ell - m) \frac{\pi}{2} \right] e^{im\phi} \quad (31)$$

### 3 Сферические гармоники

Выражения для компонентов поля в гауссовой системе единиц, таким образом, при выбранной зависимости от времени в виде  $e^{-i\omega t}$  и от азимутального угла в виде  $\propto e^{im\phi}$  (сопряженная мода, бегущая во встречном направлении получается заменой  $m$  на  $-m$ ) запишутся в следующем виде:

ТЕ-мода

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_{TE} &= C_{TE} \left[ \frac{m}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) w_\ell(kr) \mathbf{e}_\theta + i \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} w_\ell(kr) \mathbf{i}_\phi \right], \\ \hat{\mathbf{b}}_{TE} &= -C_{TE} \frac{1}{k_0 c} \left[ \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{w_\ell(kr)}{r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial(r w_\ell(kr))}{r \partial r} \mathbf{e}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\partial(r w_\ell(kr))}{r \partial r} \mathbf{e}_\phi \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

ТМ-мода:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_{TM} &= C_{TM} \frac{1}{\mu \epsilon k_0} \left[ \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{w_\ell(kr)}{r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial(r w_\ell(kr))}{r \partial r} \mathbf{e}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{im}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\partial(r w_\ell(kr))}{r \partial r} \mathbf{e}_\phi \right] \\ \hat{\mathbf{b}}_{TM} &= C_{TM} \frac{1}{c} \left[ \frac{m}{\sin \theta} Y_{\ell m}(\theta, \phi) w_\ell(kr) \mathbf{e}_\theta + i \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} w_\ell(kr) \mathbf{e}_\phi \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где  $w_\ell(nk_0r)$  являются сферическими функциями Бесселя, которые равны  $j_\ell(nk_0r)$  внутри шара и  $h_\ell^{(1)}(k_0r)$  – снаружи. Как и ранее, для среды с  $n_e \neq 1$  решения получаютс формальной заменой  $n \rightarrow n_i/n_e$ ,  $k_0 \rightarrow n_e k_0$ . Если бы зависимость от времени была выбрана в виде  $e^{i\omega t}$ , убегаящая на бесконечность волна описывалась бы функцией  $h_\ell^{(2)}(k_0r)$ .

Из равенства тангенциальных составляющих поля на границе при ( $r = a$ )

$$E_\theta^i = E_\theta^e, E_\phi^i = E_\phi^e \quad (34)$$

$$B_\theta^i = B_\theta^e, B_\phi^i = B_\phi^e \quad (35)$$

получаем соотношения:

$$\begin{aligned} C_{TE,e} &= C_{TE,i} \frac{j_\ell(nk_0a)}{h_\ell^{(1)}(k_0a)} \\ C_{TM,e} &= n^2 C_{TM,i} \frac{j_\ell(nk_0a)}{h_\ell^{(1)}(k_0a)}, \end{aligned} \quad (36)$$

для ТЕ и ТМ мод, связывающие амплитуды полей снаружи и внутри резонатора, помеченные, соответственно индексами  $e$  и  $i$ , а также характеристическое уравнение, определяющее собственные числа  $k_{lq}$  колебаний диэлектрического резонатора:

$$\frac{P \partial[\tilde{y} j_\ell(\tilde{y})] / \partial \tilde{y}}{j_\ell(\tilde{y})} = \frac{\partial[\tilde{x} h_\ell^{(1)}(\tilde{x})] / \partial \tilde{x}}{h_\ell^{(1)}(\tilde{x})}, \quad (37)$$

где  $P = 1/n^2$  для колебаний ТМ и  $P = 1$  для ТЕ-мод,  $\tilde{x} = k_0a$  – так называемый диффракционный параметр размера шара,  $\tilde{y} = nk_0a$ . В развернутом виде эти уравнения запишутся для ТЕ:

$$n \frac{j_\ell'(\tilde{y})}{j_\ell(\tilde{y})} = \frac{h_\ell^{(1)'(\tilde{x})}}{h_\ell^{(1)}(\tilde{x})}, \quad (38)$$

для ТМ:

$$\frac{j_\ell'(\tilde{y})}{j_\ell(\tilde{y})} = n \frac{h_\ell^{(1)'(\tilde{x})}}{h_\ell^{(1)}(\tilde{x})} + \frac{n^2 - 1}{n\tilde{x}}, \quad (39)$$

Воспользовавшись свойствами функций Бесселя (15) характеристическое уравнение можно переписать в другой часто используемой форме для ТЕ:

$$n \frac{j_{\ell-1}(\tilde{y})}{j_\ell(\tilde{y})} = \frac{h_{\ell-1}^{(1)}(\tilde{x})}{h_\ell^{(1)}(\tilde{x})}, \quad (40)$$

для ТМ:

$$\frac{j_{\ell-1}(\tilde{y})}{j_\ell(\tilde{y})} = n \frac{h_{\ell-1}^{(1)}(\tilde{x})}{h_\ell^{(1)}(\tilde{x})} - \frac{\ell(n^2 - 1)}{n\tilde{x}}, \quad (41)$$

Через функции Риккати-Бесселя это характеристическое уравнение записывается еще проще:

$$nP \psi'_\ell(y) \zeta_\ell(x) - \psi_\ell(y) \zeta'_\ell(x) = 0 \quad (42)$$

## 4 Собственные частоты диэлектрического шара

Корни трансцендентных уравнений (37,42) являются комплексными числами, при этом малая мнимая часть определяет излучательную добротность моды (потери на излучение с выпуклой поверхности).

Численный расчет сферических функций, даже очень высоких номеров [3] и, соответственно, численное решение уравнения (37) не составляет особых проблем, поэтому как и для цилиндра получим здесь лишь очень простую и физически прозрачную аппроксимацию, дающую к тому же приближения достаточные для большинства приложений.

Мнимая часть корней, которая определяет так называемую излучательную добротность резонатора, связанную с потерей энергии на излучение в окружающее пространство в реальных резонаторах очень мала, а, следовательно, она является малым параметром в уравнении (37). Полагая  $\tilde{x} = \tilde{x}' + i\tilde{x}''$ ,  $\tilde{x}' \gg \tilde{x}''$ , и, раскладывая в точке  $\tilde{x}'$  все функции, получим систему из двух действительных уравнений для нахождения действительной и мнимой частей.

Уравнение для действительной части можно также просто получить, если пренебречь в характеристическом уравнении действительными частями сферической функции Ханкеля, то есть фактически заменить снаружи резонатора сферические функции Ханкеля, описывающие на бесконечности убегающую волну, на функцию Неймана.

$$(P - 1)j_\ell(y)y_\ell(x) + x(Pnj'_\ell(y)y_\ell(x) - j_\ell(y)y'_\ell(x)) = 0. \quad (43)$$

Такая замена эквивалентна предположению, что на некотором расстоянии от резонатора много большем его радиуса находится отражающий экран. Преобразуя производные от сферических функций в функции меньшего номера получаем уравнение, удобное для численного решения:

$$x'(Pn j_{\ell-1}(nx') y_\ell(x') - j_\ell(nx') y_{\ell-1}(x')) + \ell(1 - P)j_\ell(nx') y_\ell(x') = 0. \quad (44)$$

Это уравнение имеет много корней, которые помечают, начиная с наименьшего, индексом  $q$ . Высокодобротные моды с малым порядком  $q$  в геометрическом приближении представляют собой волну, бегущую внутри резонатора вдоль его внутренней поверхности, испытывающую многократное полное внутреннее отражение. Легко понять, что моды с малыми потерями могут существовать лишь до тех пор, пока угол падения такой бегущей волны больше чем угол полного внутреннего отражения  $\sin(\vartheta_i) = 1/n$ . Таким

образом, из резонансного условия для продольной компоненты волнового вектора  $k \sin(\vartheta_i)an \simeq \ell$ , получаем, что моды шепчущей галереи возможны лишь при  $x < \ell$ , а поскольку при скользящем падении  $nka \simeq \ell$ , то  $\ell/n < x < \ell$ .

Если бы отражение происходило не от диэлектрических стенок, а от стенок окружающего вещества с  $\epsilon, \mu \rightarrow \infty$ , то характеристическое уравнение имело бы для мод шепчущей галереи одинаковый простой вид:  $j_\ell(nk_{\ell q}a) = 0$  и решения  $nk_{\ell q}a = t_{\nu q}$ , где  $t_{\nu q}$  – корни функции Бесселя,  $\nu = \ell + 1/2$ . При полном внутреннем отражении поле моды немного (на глубину меньшую длины волны) проникает в окружающее пространство и спадает вне его по экспоненте приблизительно как  $\propto e^{ik_\perp(r-a)} = e^{-\sqrt{n^2-1}k_0(r-a)}$ . Этот результат следует из равенства тангенциальных компонент волнового вектора  $k$  на границе резонатора с окружающей средой. Для скользящей волны:  $k_{||} = nk_0$ ,  $k_\perp = \sqrt{k_0^2 - k_{||}^2} = ik_0\sqrt{n^2 - 1}$ .

$$\frac{y'_\ell(\tilde{x})}{y_\ell(\tilde{x})} = -\sqrt{n^2 - 1} \quad (45)$$

Этот результат можно получить и непосредственно из асимптотических разложений Дебая для функции Ханкеля [1]) при  $x < \ell$ . Различие между модами  $TE$  и  $TM$  появляется из-за разных направлений вектора  $\mathbf{E}$  на границе, и, соответственно, разных граничных условий. Будем искать решения вблизи нуля функции Бесселя в виде

$$\tilde{t} = n\tilde{x}' \simeq t_{\nu q} - \Delta. \quad (46)$$

Тогда

$$j_\ell(n\tilde{x}) \simeq -\Delta \frac{\partial j_\ell(nx)}{n\partial x} \quad (47)$$

Подставляя эти приближения в характеристическое уравнение и, пренебрегая членами порядка  $\tilde{x}^{-1}$ , получим:

$$\Delta_{TE|TM} = \frac{Pn}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (48)$$

Полученное приближение  $n\tilde{x}' = t_{\nu q} + \Delta_{TE|TM}$ , имеет точность порядка  $\nu^{-2/3}$ , приемлемую для многих оценок.

Корень  $t_{\nu q}$  можно легко найти численно или рассчитать приближенно из приближения для нулей функции Эйри  $\alpha_q$ , которой можно аппроксимировать функцию Бесселя при больших значениях порядка  $\ell$  [2]:

$$\begin{aligned} t_{\nu q} &\simeq \nu - \alpha_q \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{20}\alpha_q^2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1/3} + O(\nu^{-2/3}) \\ \alpha_q &\simeq -f \left(\frac{3\pi(4q-1)}{8}\right) \\ f(z) &= z^{2/3} \left[ 1 + \frac{5}{48}z^{-2} - \frac{5}{36}z^{-4} + \frac{77125}{82944}z^{-6} + \dots \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Разными авторами предложены и другие способы нахождения приближений для действительной и мнимой части корней (см. например [4, 5]. В работе [6] получены асимптотики решений, дающие точность порядка  $O(\ell^{-3})$ . Приведем здесь лишь пять первых членов, дающих точность порядка  $O(\ell^{-2})$ .

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{lq} &= n\tilde{x}_{lq} = \nu - \alpha_q(\nu/2)^{1/3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(n^2 - 1)^{(k+1)/2}} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-k/3} \\
c_0 &= -nP \\
c_1 &= \frac{3(n^2 - 1)\alpha_q^2}{20} \\
c_2 &= -\frac{n^3 P(2P^2 - 3)\alpha_q}{6} \\
c_3 &= \frac{350n^4 P(1 - P)(P^2 + P - 1) + (n^2 - 1)^2(10 + \alpha_q^3)}{1400} \\
c_4 &= -\frac{n^3 \alpha_q^2(4 - n^2 + e_4)}{40} \\
c_5 &= \frac{\alpha_q(40(351n^6 - 3n^4 + 3n^2 - 1) - 479(n^2 - 1)^3 \alpha_q^3 - e_5)}{504000} \\
e_4 &= \frac{n^2(1 - P)(n^8 + 12n^4 - 8)}{n^8} \\
e_5 &= \frac{7000n^2(1 - P)(2n^{10} - 7n^8 - 16n^6 + 56n^4 - n^2 - 28)}{n^6} \quad (50)
\end{aligned}$$

При работе с микросферами часто требуется решать обратную задачу – вычислять индекс моды  $\ell$  по размерному параметру  $x$ . Оборачивая предыдущие формулы можно получить следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}
\ell &= \tilde{y} + \alpha_q \left(\frac{\tilde{y}}{2}\right)^{1/3} + \frac{nP}{(n^2 - 1)^{1/2}} + \frac{\alpha_q^2}{60} \left(\frac{\tilde{y}}{2}\right)^{-1/3} \\
&+ \frac{\alpha_q nP(2n^2 P^2 - 2n^2 - 1)}{6(n^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{\tilde{y}}{2}\right)^{-2/3} + O(\tilde{y}^{-1}) \quad (51)
\end{aligned}$$

$$(52)$$

В таблице приведены примеры вычисления действительной части размерного параметра  $x' = k_0 a$ , характеризующего собственные частоты сферического резонатора с показателем преломления  $n = 1.457$  в разных приближениях для мод порядка  $\ell = 100$ . В первой колонке указан тип моды, во второй результаты численного решения методом Ньютона комплексного характеристического уравнения (37), в третьей результат решения действительного уравнения (43), в четвертой расчет с использованием аппроксимации Шиллера с учетом пяти выписанных членов и в последней колонке – простая аппроксимация (46), полученная выше.

Тип	$\tilde{x}'$ (числ. 37)	$\tilde{x}'$ (числ. 43)	$\tilde{x}'$ (прибл. 50)	$\tilde{x}'$ (прибл. 46)
TE <sub>100,m,1</sub>	74.053609	74.053609	74.0542	74.1079
TM <sub>100,m,1</sub>	74.536459	74.536459	74.5420	74.6070
TE <sub>100,m,2</sub>	78.752969	78.752969	78.7559	78.8526
TM <sub>100,m,2</sub>	79.215800	79.215800	79.2359	79.3518
TE <sub>100,m,3</sub>	82.721724	82.721724	82.7296	82.8635
TM <sub>100,m,3</sub>	83.159929	83.159929	83.2032	83.3627
TE <sub>100,m,4</sub>	86.317566	86.317566	86.3344	86.5026
TM <sub>100,m,4</sub>	86.724474	86.724474	86.8024	87.0018
TE <sub>100,m,5</sub>	89.672687	89.672687	89.7056	89.9063
TM <sub>100,m,5</sub>	90.037841	90.037841	90.1684	90.4054
TE <sub>100,m,6</sub>	92.848980	92.849031	92.9118	93.1439
TM <sub>100,m,6</sub>	93.153519	93.153614	93.3698	93.6431
TE <sub>100,m,7</sub>	95.885049	95.887571	95.9937	96.2565
TM <sub>100,m,7</sub>	96.102926	96.107857	96.4472	96.7557
TE <sub>100,m,8</sub>	98.837164	98.869184	98.9779	99.2709
TM <sub>100,m,8</sub>	98.966633	99.032736	99.4271	99.7701

## 5 Излучательные потери

Комплексные корни характеристического уравнения (37), определяющего собственные частоты, имеют следующий смысл: так как поле в диэлектрическом шаре связано с электромагнитным полем в окружающем пространстве, часть энергии колебаний постоянно уносится уходящими на бесконечность волнами. Таким образом, однажды возбужденные в резонаторе колебания затухают со временем из-за излучения (излучательные потери). Если представить корень уравнения, как  $k = k' - ik''$ , то излучательную добротность, с точностью до множителя  $2\pi$ , характеризующую отношение запасенной в резонаторе энергии к энергии теряемой за период, можно рассчитать как  $Q_{\text{изл}} = k'/2k'' = \tilde{x}'/2\tilde{x}''$ . Физический смысл излучательной добротности можно понять следующим образом. Вблизи поверхности резонатора фазовая скорость экспоненциально спадающей волны, распространяющейся в воздухе вдоль поверхности, равна  $c/n$ . При удалении от резонатора эта компонента скорости линейно нарастает, пока на расстоянии  $(n-1)a$  не сравняется со скоростью света. На этом расстоянии излучение будет отрываться от резонатора с потерей энергии окружающее пространство. Для реальных микрорезонаторов излучательные потери пренебрежимо малы.

Раскладывая характеристическое уравнение до первого порядка относительно  $x''$ , получаем:

$$\begin{aligned}
Q''_{TE} &= \frac{\tilde{x}' \chi_\ell^2(\tilde{x}') (n^2 - 1)}{2} \\
Q''_{TM} &= \frac{\tilde{x}' \chi_\ell^2(\tilde{x}') (n^2 - 1)}{2} \left( \frac{l(l+1)}{n^2 \tilde{x}'^2} + \frac{\chi_\ell'^2(\tilde{x}')}{\chi_\ell^2(\tilde{x}')} \right)
\end{aligned} \tag{53}$$

**Задание 5.1** *Получите это выражение для излучательной добротности.*

Используя приближение Дебая для функции Неймана при  $\nu > x$ , можно получить еще более грубую оценку:

$$\begin{aligned} Q_{TE, \text{изл}} &\simeq \frac{\tilde{x}'^2 (n^2 - 1)}{2s} e^{2(\nu \operatorname{arctanh}(s/\nu) - s)} \\ Q_{TM, \text{изл}} &\simeq \frac{\tilde{x}'^2 (n^2 - 1)}{2s} \left( \frac{\ell(\ell + 1)}{n^2 \tilde{x}'^2} + \frac{s^2}{\tilde{x}'^2} \right) e^{2(\nu \operatorname{arctanh}(s/\nu) - s)} \\ s &= \sqrt{\nu^2 - \tilde{x}'^2} \end{aligned} \quad (54)$$

В обоих случаях подставлять следует, естественно, решения или приближения  $\tilde{x}'$  для, соответственно, ТЕ или ТМ мод. Аналогичные формулы были предложены в работах [7, 8], однако, как будет видно из иллюстративного расчета ниже, точность такого приближения весьма невелика и для не слишком высоких порядков, для которых как раз интересно рассмотрение излучательных потерь, ошибка составляет десятки процентов. Причина состоит в том, что это выражение очень чувствительно к точности используемого приближения размерного параметра  $\tilde{x}'$  (входит под экспоненту), кроме того, использованное приближение имеет большую погрешность при больших  $q$ . Поэтому в наше время, когда численный расчет специальных функций проблемы не составляет, можно рекомендовать к применению лишь выражения (53).

В следующей таблице приведены примеры вычисления добротности тех же мод порядка  $\ell = 100$ , для которых выше были рассчитаны собственные частоты, как и прежде показатель преломления диэлектрического шара  $n = 1.457$ . В первой колонке указан тип моды, во второй результаты численного нахождения методом Ньютона корней комплексного характеристического уравнения (37), в третьей результат расчета по формуле (53) с использованием численного решения для  $x'$  (43), в четвертой расчет по приближенной формуле (53) с использованием приближения для корней (46), в пятой с использованием более точного приближения для корней (50), что позволяет несколько улучшить ситуацию.

## 5.1 Нормировка поля в резонаторе

Для теоретического анализа различных эффектов, связанных с модами типа шепчущей галереи, удобно нормировать распределения полей, например так, чтобы квадрат амплитуды был равен энергии:

$$\mathcal{E}_{\ell m q} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \epsilon |E(t) \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})_{\ell m q}|^2 dv = |E_t(t)|^2 \quad (55)$$

При этом в резонансе:

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \epsilon |\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})_{\ell m q}|^2 dv = \frac{1}{2\mu\mu_0} \int_V |\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{r})_{\ell m q}|^2 dv = 1, \quad (56)$$

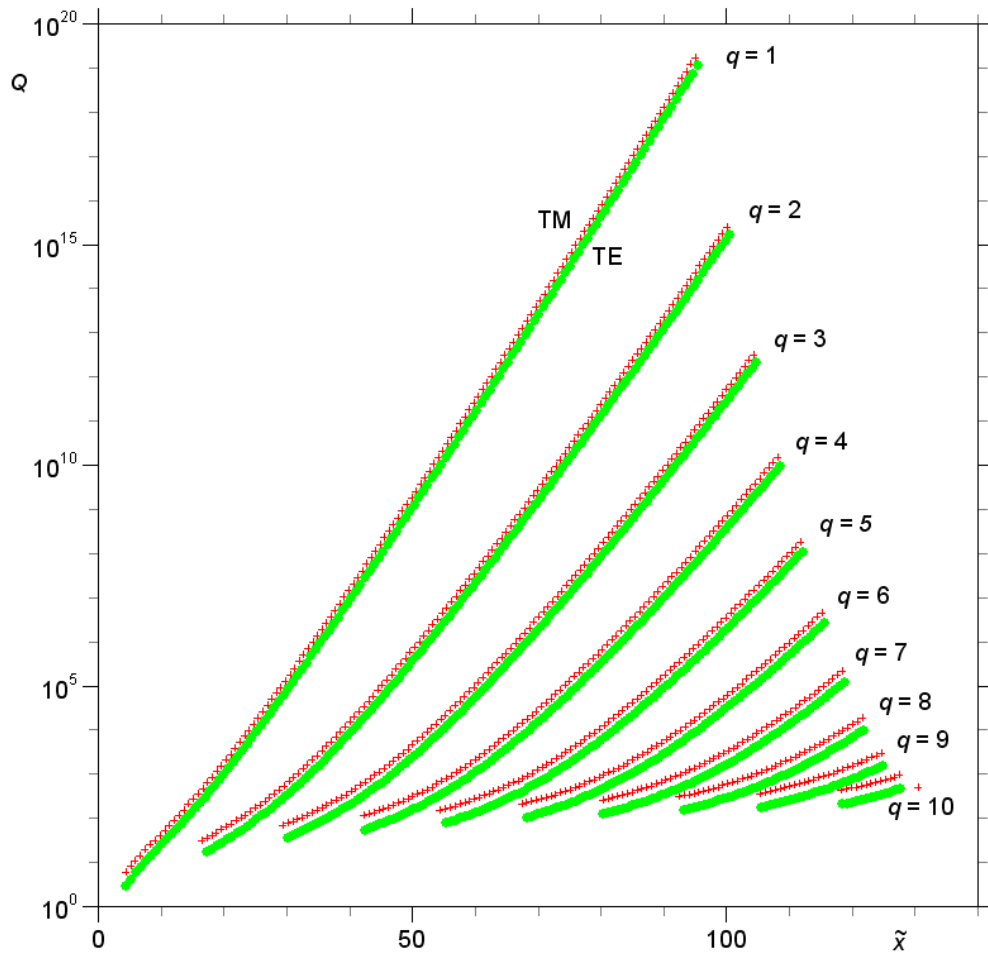


Рис. 3: Излучательная добротность мод разных типов и номеров  $q$  в сферическом резонаторе



Тип	$Q = \tilde{x}'/(2\tilde{x}'') \text{ (37)}$	Q (53,43)	Q (54,46)	Q (54,50)
TE <sub>100,100,1</sub>	2.422E14	2.422E14	2.176E14	2.395E14
TM <sub>100,100,1</sub>	1.690E14	1.690E14	1.497E14	1.684E14
TE <sub>100,100,2</sub>	9.707E10	9.707E10	8.213E10	9.530E10
TM <sub>100,100,2</sub>	6.423E10	6.423E10	5.225E10	6.257E10
TE <sub>100,100,3</sub>	3.280E08	3.280E08	2.665E08	3.182E08
TM <sub>100,100,3</sub>	2.066E08	2.066E08	1.577E08	1.955E08
TE <sub>100,100,4</sub>	3.914E06	3.914E06	3.083E06	3.729E06
TM <sub>100,100,4</sub>	2.349E06	2.349E06	1.704E06	2.143E06
TE <sub>100,100,5</sub>	1.206E05	1.206E05	9.230E04	1.114E05
TM <sub>100,100,5</sub>	6.892E04	6.892E04	4.776E04	5.994E04
TE <sub>100,100,6</sub>	8.568E03	8.567E03	6.267E03	7.428E03
TM <sub>100,100,6</sub>	4.651E03	4.650E03	3.060E03	3.755E03
TE <sub>100,100,7</sub>	1.388E03	1.379E03	9.624E02	1.091E03
TM <sub>100,100,7</sub>	7.144E02	7.101E02	4.542E02	5.271E02
TE <sub>100,100,8</sub>	4.789E02	4.332E02	4.569E02	4.505E02
TM <sub>100,100,8</sub>	2.330E02	2.109E02	2.562E02	2.352E02

Поскольку распределение поля является решением задачи на собственные значения в ограниченной области (если пренебречь излучением), распределения полей для разных мод практически ортогональны:

$$\frac{\epsilon_0}{4} \int_V \epsilon [\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})_{\ell' m' q'} \hat{\mathbf{e}}^*(\mathbf{r})_{\ell m q} + \text{к.с.}] dv = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \delta_{q q'}, \quad (57)$$

интегрирование здесь и далее ведется по объему резонатора и некоторой прилегающей области, вне волновой зоны, где выпадающее поле заметно. Хотя формальное интегрирование поля моды по всему объему в открытом резонаторе из-за наличия мнимой части  $k$  и встречает математические сложности (интеграл на бесконечности расходится), выбирая конечный физический объем интегрирования, или, полагая излучательную добротность равной бесконечности эту непринципиальную проблему можно обойти. Для микрорезонаторов практически эти условия выполняются, если  $r < na$  и  $r - a \sim \lambda$ . В тех случаях, когда излучательная добротность играет ключевую роль, можно воспользоваться для нормировки более строгим подходом, который обсуждается в Главе 2. В случае полей типа  $TE$  для вычисления удобнее брать интегралы для электрической, а в случае  $TM$  - магнитной компоненты.

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{E}_{TE}, \mathbf{H}_{TM}|^2 dv &= \int (|E_{TE, \theta}, H_{TM, \theta}|^2 + |E_{TE, \phi}, H_{TM, \phi}|^2) dv \\ &\propto 2\pi C_{\ell m}^2 \left[ \int_{-1}^1 \frac{m^2}{1 - \eta^2} (P_{\ell}^m(\eta))^2 d\eta + \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial P_{\ell}^m(\eta)}{\partial \eta} \right)^2 (1 - \eta^2) d\eta \right] \int w_{\ell}^2(kr) r^2 dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi C_{\ell m}^2 \int_{-1}^1 (P_\ell^m(\eta))^2 \left[ \frac{m^2}{1-\eta^2} + \left( \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right) \right] d\eta \int w_\ell^2(kr) r^2 dr \\
&= 2\pi C_{\ell m}^2 \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \left[ m + \left( \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} - m \right) \right] \int w_\ell^2(kr) r^2 dr \\
&= \ell(\ell+1) \int w_\ell^2(kr) r^2 dr
\end{aligned} \tag{58}$$

Из этого расчета следует, что отношение энергии, приходящейся на компоненту  $E_\phi$  к  $E_\theta$  для больших  $\ell$  и  $m$  в ТЕ моде, а также для других компонент составляет:

$$\begin{aligned}
\frac{\int |E_{TE,\phi}|^2 dv}{\int |E_{TE,\theta}|^2 dv} &= \frac{\int |H_{TE,\theta}|^2 dv}{\int |H_{TE,\phi}|^2 dv} = \frac{\int |H_{TM,\phi}|^2 dv}{\int |H_{TM,\theta}|^2 dv} = \frac{\int |E_{TM,\theta}|^2 dv}{\int |E_{TM,\phi}|^2 dv} \\
&= \frac{2\ell(\ell+1)}{(2\ell+1)m} - 1 \simeq \frac{\ell-m+1/2}{m},
\end{aligned} \tag{59}$$

то есть основная доля энергии приходится на компоненту  $E_\theta$ .

Для интегрирования по  $\eta$  проще всего один раз проинтегрировать по частям и затем воспользоваться дифференциальным уравнением для функций Лежандра (20). Интегрирование по  $r$  проведем в пределах от нуля, до виртуальной поверхности радиусом  $\tilde{a}$ , на которой  $j_\ell(kn\tilde{a})$  обращается в нуль. При этом  $j_\ell(kna) \simeq -\Delta j'_\ell(y)$ .

$$\int_0^{\tilde{a}} j_\ell^2(knr) r^2 dr = \frac{a^3}{2} \left( \frac{\partial j_\ell(\rho)}{\partial \rho} \right)^2 \simeq \frac{a^3}{2\Delta^2} j_\ell^2(kna). \tag{60}$$

**Задание 5.2** Покажите, что отношение компонент:

$$\begin{aligned}
\frac{\int |H_{TE,\phi}|^2 dv}{\int |H_{TE,r}|^2 dv} &= \frac{\int |E_{TM,\phi}|^2 dv}{\int |E_{TM,r}|^2 dv} \\
&\simeq \frac{(nk_0a)^2 - \ell(\ell+1)}{(nk_0a)^2} \simeq \alpha_q \left( \frac{\nu}{2} \right)^{-2/3}
\end{aligned} \tag{61}$$

Таким образом, можно с хорошей степенью приближения считать, что практически вся энергия в резонаторе сосредоточена у ТЕ моды в компонентах поля  $E_\theta$  и  $H_r$  и у ТМ моды в компонентах  $H_\theta$  и  $E_r$ .

Таким образом, при введенной нормировке вида (56) нормировочные константы в выражениях (32,34) имеют вид:

$$C_{TE|TM} = \frac{2}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0} \sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{\Delta_{TE|TM}}{a^{3/2} j_\ell(n x_{TE|TM})} \tag{62}$$

Вычислим приближение эффективного объема моды резонатора для фундаментальной моды  $\ell = m$ :

$$V_{TE,eff} = \frac{\int |E|^2 dv}{|E_{max}|^2} \simeq \frac{\pi^{3/2} 2^{2/3} (\ell+1) t'_{\nu q} \text{Ai}'_\ell{}^2(\alpha_q)}{t_{\nu q} \ell^{1/2} \nu^{5/3} \text{Ai}_\ell{}^2(\alpha'_q)} a^3 \rightarrow c_q \ell^{11/6} \left( \frac{\lambda}{n} \right)^3$$

$$V_{TM,eff} = \frac{\int c^2 |B|^2 dv}{n^2 |E_{max}|^2} \simeq \frac{\pi^{3/2} 2^{2/3} t_{\nu q}^3}{t_{\nu q} \ell^{1/2} \nu^{5/3} (\ell + 1)} \frac{\text{Ai}'_\ell{}^2(\alpha_q)}{\text{Ai}_\ell{}^2(\alpha_q)} a^3 \rightarrow c_q \ell^{11/6} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \quad (63)$$

где численные коэффициенты  $c_{1..5} = 0.061, 0.131, 0.184, 0.230, 0.272$ . Здесь мы учли, что  $P_\ell^\ell(0) = (2\ell - 1)!!$ , воспользовались формулой Стирлинга для вычисления факториалов и использовали аппроксимацию сферических функций функциями Эйри (12), пренебрегая малым дополнительным сдвигом максимумов относительно такой аппроксимации. Полученное выражение хорошо работает уже при  $\ell \geq 50$ . Точный численный расчет [9] показывает, что при уменьшении  $\ell$  эффективный объем убывает лишь до некоторого минимального значения, а потом опять начинает расти.

Для других мод с  $\ell \neq m$  вычисления аналогичны, но надо учесть, что функции Лежандра имеют абсолютный максимум не в нуле, а вблизи углов  $\sin \theta = \pm m/\ell$ . В этом заключается некоторое неудобство эффективного объема, вводимого через максимум электрического поля, то есть через поле в какой-то одной точке внутри резонатора. Кроме того, надо иметь в виду, что у мод, имеющих более одного максимума по радиусу ( $q > 1$ ), абсолютным максимумом является первый, а не ближайший к поверхности. Как будет показано далее, например, при исследовании внутреннего рассеяния и нелинейности характерной является параметр, имеющий также размерность объема:

$$V^{NL} = \frac{\left(\int |\hat{\mathbf{e}}|^2 dv\right)^2}{\int |\hat{\mathbf{e}}|^2 |\dot{\mathbf{e}}|^2 dv} \quad (64)$$

## Список литературы

- [1] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, Москва, 1964.
- [2] М. Абрамовиц и И. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, Москва, 1979.
- [3] E. Gillman and H. Fiebig, *Computers in physics* **2**, 62 (1988).
- [4] C.C. Lam, P.T. Leung, and K. Young, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 1585 (1992).
- [5] B. R. Johnson, *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 343 (1993).
- [6] S. Schiller, *Appl. Opt.* **32**, 2181 (1993).
- [7] . . Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы*, М., Советское радио, 1966.
- [8] А.Н. Ораевский, *Квантовая электроник* **32**, 377 (2002).
- [9] J. R. Buck and H. J. Kimble, *Phys. Rev. A* **67**, 033806 (2003).