

Спецкурс “Оптические микрорезонаторы”.  
Лекция 8. Лучевое приближение при наличии  
диэлектрической границы.

М.Л.Городецкий

15 апреля 2008 г.

## 1 Лучевое приближение при наличии диэлектрической границы.

### 1.1 Каустики и момент импульса фотона. Принцип локализации.

До сих пор мы применяли лучевой подход и метод эйконала к закрытым резонаторам с непроницаемой границей. Посмотрим, что будет происходить с лучами в диэлектрических резонаторах [1]. Рассмотрим самый простой случай цилиндрического бесконечного по  $z$  резонатора с показателем преломления  $n$  в вакууме. На цилиндр падает снаружи узкий луч света с прицельным расстоянием  $b$  (Рис. 1.1). Он частично отражается, а частично проходит в резонатор. Угол падения определяется соотношением:

$$\sin \theta_i = b/a, \quad (1)$$

где  $a$  – радиус цилиндра. Волновое число резонатора в окружающем резонатор пространстве –  $k_0$ , импульс  $p = \hbar k_0$ , момент импульса –  $L = \hbar \tilde{L} = \hbar b k_0$ . В среде волновое число  $n k_0$ . Тангенциальные компоненты волновых векторов на границе раздела должны быть равны:  $k_t = \sin \theta_i k_0 = \sin \theta_t n k_0$ , отсюда следует закон Снелля,

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = n, \quad (2)$$

а также равенство углов падения и отражения. Фактически это закон сохранения импульса, тангенциальная компонента которого не возмущается границей.

Момент импульса фотона внутри резонатора  $L = \hbar n k_0 a \sin \theta_t = \hbar k_0 a \sin \theta_i = \hbar b k_0$ , то есть момент импульса фотона при переходе через границу в аксиально симметричной конфигурации сохраняется.

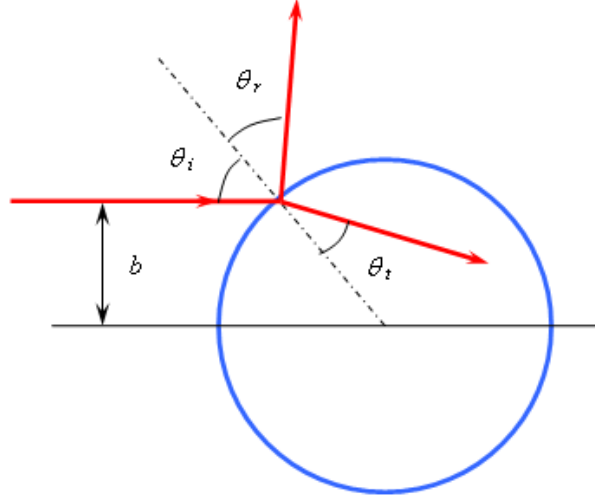


Рис. 1:

Тангенциальная компонента волнового вектора

$$k_t = \frac{\tilde{L}}{\rho} = k_0 \frac{b}{\rho} \quad (3)$$

непрерывна при переходе через границу раздела. Однако радиальная компонента волнового вектора:

$$k_\rho = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \pm n_\rho k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{\rho n_\rho}\right)^2}, \quad (4)$$

испытывает скачок на границе из-за скачка  $n_\rho = \begin{cases} n, & \rho < a \\ 1, & \rho > a \end{cases}$ .

Минимальное расстояние на которое подходит луч к центру  $\rho_{min} = a_c = a \sin \theta_t = b/n < b$  определяет внутреннюю каустику резонатора. Все лучи, испытавшие отражение внутри резонатора касаются этой внутренней каустики и тангенциальны к ней в области касания. Окружность радиуса  $b$  играет роль каустики для лучей снаружи цилиндра – их продолжения внутрь касаются окружности. В рассмотренном случае обе каустики лежат внутри цилиндра и волны с заданным моментом импульса могут распространяться везде кроме области  $\rho < a_c$ . Если мы увеличим прицельный параметр  $b$  так, чтобы он стал немного больше  $a$ , то ситуация изменится. В этом случае волны с соответствующим моментом импульса  $L = \hbar b k_0$ , имеющие действительное значение радиального импульса могут распространяться как внутри, так и снаружи цилиндра, но появляется запрещенная зона  $a < \rho < b$  в которой волны с таким угловым моментом не могут находиться. При этом оказывается, что лучи внутри цилиндра падают на поверхность под углом

$\theta_t < \arcsin(1/n)$ , который в геометрической оптике называется углом полного внутреннего отражения. Внутри цилиндра могут распространяться не все такие лучи, а только такие, которые воспроизводят фазу после многократного отражения, то есть моды резонатора. При этом  $\sin\theta_t = a_c/a$ , а из рассматривавшегося условия квантования  $nk_0a_c = m$ . Этой внутренней каустике соответствует внешняя каустика:  $b = a_c n_e / n_i = \frac{m}{n_e k_{0mq}}$ , где  $k_{0mq}$  определяется характеристическим уравнением. Таким образом, каждой моде резонатора ставится в соответствие некоторое расстояние  $b$ . Именно на этом расстоянии тангенциальная скорость волны, туннелирующей в окружающее пространство сравнивается со скоростью света в окружающей среде и происходит излучение так, что ему соответствует каустика  $b$  (Рис.2). Это утверждение называется "принципом локализации"[2]. Верно и обратное. Чтобы возбудить моду в резонаторе лучом из окружающего пространство, надо сфокусировать его тангенциально к внешней каустике  $b$ . На практике, однако, такой способ может быть реализован только для очень малых резонаторов с малой излучательной добротностью, и для мод у которых такая внешняя каустика  $b$  оказывается очень близко к поверхности  $a$ . В реальных резонаторах лишь очень малая часть энергии моды, обратно пропорциональная излучательной добротности перекрывается с возбуждающим лучом.

Третий случай соответствует условию  $bn > a$ . В этом случае обе каустики находятся вне цилиндра и моды в резонаторе невозможны.

## 1.2 Матрица рассеяния

Для описания поведения волны при падении на границу раздела двух сред удобно пользоваться формализмом матрицы рассеяния  $\mathbf{S}$  [3, Гл. 3]. Если на оптическую систему падают волны с амплитудами  $a_i$ , то в линейной системе они будут связаны с выходящими из системы в результате преломления и отражения волнами  $b_i$  соотношением  $\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$ . Для описания преломления и отражения достаточно взять матрицу  $2 \times 2$  (Рис. ??):

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Эта систему можно записать в матричной форме в виде:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (6)$$

Если нет потерь, то должно выполняться условие сохранения энергии:

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2, \quad (7)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{a}^+ \mathbf{a} = \mathbf{b}^+ \mathbf{b} = \mathbf{a}^+ \mathbf{S}^+ \mathbf{S} \mathbf{a}. \quad (8)$$

Верхний индекс '+' означает транспонированную и комплексно-сопряженную матрицу  $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}^{*T}$ . Следовательно,

$$\mathbf{a}^+ (\mathbf{I} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S}) \mathbf{a} = 0, \quad (9)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, и значит матрица  $\mathbf{S}$  должна быть унитарной:

$$\mathbf{S}^+ \mathbf{S} = \mathbf{I} \quad (10)$$

или

$$\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}^{-1}. \quad (11)$$

Покомпонентно расписывая условие (11), получаем:

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= |S_{22}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \\ S_{21} S_{11}^* + S_{22} S_{12}^* &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Если на рисунке (??) все волны  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  пустить в противоположных направлениях, то входными сигналами станут волны  $\mathbf{b}$ , а выходными –  $\mathbf{a}$ . Такое обращение времени эквивалентно замене  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}^*$  и  $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}^*$ . При этом матрица рассеяния не изменится:

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{S} \mathbf{b}^* \quad (13)$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^* \mathbf{b} \quad (14)$$

Домножая слева на обратную матрицу, получаем:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{S}^*]^{-1} \mathbf{a} \quad (15)$$

Сравнивая последний результат с (11) и (6) и, получаем, что

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^+, \quad (16)$$

что означает требование симметричности матрицы  $\mathbf{S}$ , и значит  $S_{12} = S_{21}$ . Вместе с этим новым условием, получаются такие требования на компоненты  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{21} \\ |S_{11}|^2 &= |S_{22}|^2 \\ |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= 1 \\ S_{12} S_{11}^* + S_{22} S_{12}^* &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, в системе без потерь матрица рассеяния полностью описывается тремя действительными параметрами.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} |S_{11}|e^{i\psi_r} & \sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{i\psi_t} \\ \sqrt{1-|S_{11}|^2}e^{i\psi_t} & |S_{11}|e^{i(2\psi_t-\pi-\psi_r)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

С коэффициентами матрицы рассеяния связаны энергетические коэффициенты отражательной  $\mathcal{R} = |S_{11}|^2 = |S_{22}|^2$  и пропускательной способности  $\mathcal{T} = |S_{12}|^2$ . При этом  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ .

Во многих случаях, когда интересует лишь поведение волны вдали от рассеивателя, удобно выбрать входные и выходные поверхности, не совпадающие в общем случае с границами раздела, так, чтобы фазовые углы  $\psi_r = \pi$  и  $\psi_t = \pi/2$ . В этом случае матрица рассеяния принимает простой вид:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -R & iT \\ iT & -R \end{bmatrix} \\ R^2 + T^2 = 1. \quad (19)$$

При этом коэффициенты  $R$  и  $T$  имеют смысл амплитудных коэффициентов отражения и пропускания  $R^2 = \mathcal{R}$ ,  $T^2 = \mathcal{T}$ . Знак минус перед  $R$  выбран так, чтобы соответствовать полному отражению электромагнитной волны от металлической поверхности – при этом суммарное электрическое поле падающей и отраженной волны на границе должно обращаться в ноль и соответствовать узлу стоячей волны. Такой вид имеет, в частности, матрица рассеяния для волны, проходящей через границу раздела диэлектриков при переходе из оптически более плотной в оптически менее плотную среду. При переходе в обратном направлении амплитудный коэффициент отражения положителен.

### 1.3 Отражение и преломление лучей на границе раздела двух сред. Обобщение формул Френеля

В приближении геометрической оптики МШГ представляют собой совокупности лучей, отражающихся от внутренней поверхности диэлектрического резонатора под углом большим угла полного внутреннего отражения. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания плоской волны при ее падении на плоскую границу раздела двух сред следуют из известных формул Френеля [4, п.1.5]:

$$E_r = R_F E_i = \frac{P n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{P n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} E_i \\ E_t = T_F E_i = \frac{2\sqrt{P} n_i \cos \theta_i}{P n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} E_i. \quad (20)$$

Здесь  $E_i$ ,  $E_t$ ,  $E_r$  – амплитуды электрического поля, соответственно, в падающей, прошедшей и отраженной волне,  $\theta_i$ ,  $\theta_r = \theta_i$ ,  $\theta_t$  – углы падения, отражения и преломления (Рис. 1.3), соответственно, падающей, отраженной и прошедшей волны,  $n_i$  и  $n_t$  – показатели преломления в двух средах,

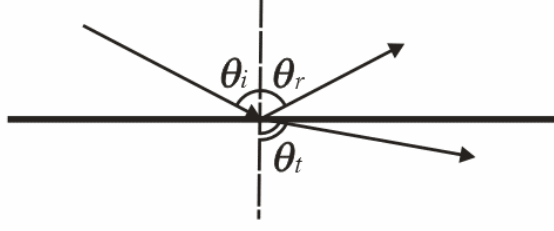


Рис. 2: Отражение и преломление света от границы раздела

а  $P$  – коэффициент, зависящий от поляризации волны. Для волны, у которой вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения (поперечноэлектрическая ТЕ-волна) и параллелен границе раздела,  $P = 1$ . Для ТМ-волны, у которой вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения и направлен в первой среде под углом падения  $\theta_i$  к границе раздела  $P = (n_t/n_i)^2$ . Уравнения Френеля легко получаются из условия непрерывности на границе раздела продольных компонент вектора  $\mathbf{E}$  и поперечных вектора  $\mathbf{D} = n^2\mathbf{E}$ . Угол преломления  $\theta_t$  связан с углом падения законом Снелля.

Коэффициент, связывающий  $E_r$  и  $E_i$  в первой из формул Френеля (20) имеет смысл амплитудного коэффициента отражения  $S_{11}$ , поскольку непосредственно связывает амплитуды поля в падающей и отраженной волне. Связь коэффициента прохождения  $S_{12}$  со второй формулой Френеля можно установить из выражений для мощности оптической волны:

$$\begin{aligned}
 R = S_{11} &= \frac{P n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{P n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \\
 T = S_{12} &= \sqrt{\operatorname{Re} \left[ \frac{k_{tz}}{k_{iz}} \right]} \frac{E_t}{E_i} = \sqrt{\frac{n_t \operatorname{Re}[\cos \theta_t]}{n_i \cos \theta_i}} T_F = \frac{2 \sqrt{P n_i n_t \cos \theta_i \operatorname{Re}[\cos \theta_t]}}{P n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

### 1.3.1 Полное внутреннее отражение

При переходе из более оптически плотную в менее оптически плотную среду ( $n_i > n_t$ ) угол преломления остается действительным лишь при углах падения, удовлетворяющих условию  $\sin \theta_i < n_i/n_t$ . При углах больших этого критического угла, называемого углом полного внутреннего отражения, угол преломления становится комплексным (действительная часть равна  $\pi/2$ ), его косинус  $\cos \theta_t = \sqrt{1 - (\sin \theta_i n_i/n_t)^2}$ , а значит и поперечная составляющая волнового вектора  $k_{tz} = n_t k_0 \cos \theta_t$  становятся чисто мнимыми, что означает, что волна во второй среде  $\propto \exp[-ik_0 n_2 \cos \theta_2]$  превращается в затухающую  $\propto \exp[-k_0 \sqrt{n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2}]$  и не распространяется на бесконечности. При этом модуль коэффициента отражения  $R$  и  $\mathcal{R} = |R|^2$  обращаются в 1, а коэффициент прохождения  $T = 0$ . Поле во второй среде, определяемое

второй из формул Френеля (20) не обращается на границе в нуль как раз из-за наличия такой затухающей волны. Этот эффект выпадающего поля при полном внутреннем отражении, играет важнейшую роль в свойствах мод шепчущей галереи, поскольку позволяет связываться с такими модами и ответственен за взаимодействие мод с окружающей резонатор средой.

При полном внутреннем отражении от границы раздела диэлектриков волна проникает во вторую среду, и это проникновение можно описать в лучевом приближении, вводя воображаемую зеркальную границу отстоящую на расстояние  $\sigma_r$  от реальной границы (Рис. 1.3). Это расстояние можно получить из Формулы для коэффициента отражения (21), полагая, что дополнительный набег фазы в коэффициенте разложения вызван прохождением этого дополнительного пути. Для почти скользких углов падения в модах шепчущей галереи, когда величина  $\cos \theta_i$  мала, раскладывая по ней выражения Френеля, можно получить:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= e^{i\phi_r} = \frac{Pn_i \cos \theta_i - i\sqrt{n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2}}{Pn_i \cos \theta_i + i\sqrt{n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2}}, \\
\phi_r &= 2 \arctg \frac{Pn \cos \theta_i}{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1}} \\
&\simeq \frac{2Pn}{\sqrt{n^2 - 1}} \cos \theta_i + \frac{Pn^3(3 - 2P^2)}{3(n^2 - 1)^{3/2}} \cos^3 \theta_i \\
&+ \frac{Pn^5(15 - 20P^2 + 8P^4)}{20(n^2 - 1)^{5/2}} \cos^5 \theta_i + O(\cos^7 \theta_i),
\end{aligned} \tag{22}$$

где  $n = n_i/n_t$ . Лучи ведут себя так, как если бы они отражались без смещения от поверхности, отстоящей от реальной поверхности на расстояние  $\sigma_r = \phi_r/(2kn \cos \theta_i)$  (Рис.3).

$$\begin{aligned}
\sigma_r = \frac{\phi_r}{2k_0 n \cos \theta} &= k_0^{-1} \left[ \frac{P}{(n^2 - 1)^{1/2}} + \frac{Pn^2(3 - 2P^2)}{6(n^2 - 1)^{3/2}} \cos^2 \theta_i \right. \\
&\left. + \frac{Pn^4(15 - 20P^2 + 8P^4)}{40(n^2 - 1)^{5/2}} \cos^4 \theta_i + O(\cos^6 \theta_i) \right].
\end{aligned} \tag{23}$$

Благодаря той же причине происходит поперечный эффективный сдвиг отраженной волны  $\sigma_p = 2\sigma_r \sin \theta_i$  – этот эффект известен, как эффект Гуса-Хенхена [5] и может быть весьма велик для скользких углов. Полное выражение для сдвига пучка конечной апертуры получается в результате расчета интерференции всех отраженных волн разложения исходного пучка.

Таким образом, если найдено решение для собственных частот резонатора с простыми нулевыми граничными условиями, оно с использованием полученного соотношения может быть расширено и на диэлектрический резонатор с модами  $TE$  и  $TM$ . Для этого в решение нужно подставить размер резонатора  $\tilde{a} = a + \sigma_r$ , увеличенный на величину  $\sigma_r$ . Так, из найденной

ранее методом эйконала аппроксимации для собственных частот сфероида следует следующее выражение:

$$nk_0a = nk_0\tilde{a} - nk_0\sigma_r = \ell - \alpha_q \left(\frac{\ell}{2}\right)^{1/3} + \frac{2p(a-b) + a}{2b} - \frac{Pn}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{3\alpha_q^2}{20} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-1/3} - \frac{\alpha_q}{12} \left(\frac{2p(a^3-b^3) + a^3}{b^3} + \frac{2n^3P(2P^2-3)}{(n^2-1)^{3/2}}\right) \left(\frac{\ell}{2}\right)^{-2/3} + O(\ell^{-1}), \quad (24)$$

где использовано приближение  $\cos\theta_i = \sqrt{1 - \ell^2/(nk\bar{a})} \simeq \sqrt{-\alpha_q}(\ell/2)^{-1/3}$ .

#### 1.4 Отражение от изогнутой поверхности

При падении луча на плоскую поверхность раздела под углом больше полного внутреннего отражения отражение будет почти полным. Почти, потому что в угловом спектре любого ограниченного пучка, например гауссова, всегда найдутся плоские волны с малыми углами падения. Однако, если поверхность выпуклая с внешней стороны, отражение не будет полным уже по другой причине (Рис. 1.4). Эту причину легко понять, а эффект оценить из простых физических соображений. Выпадающее поле волны движется вдоль изогнутой поверхности с радиусом кривизны  $r_{cv}$  с тангенциальной скоростью  $v_t = \omega/k_t = c/(n_i \sin\theta_i)$  ( $c$  – скорость света во внешней среде) и при удалении от поверхности фазовые фронты двигаются с постоянной угловой скоростью. Однако на расстоянии  $\rho_t = r_{cv}c/v_t = r_{cv}n \sin\theta_i$  от центра кривизны эта скорость сравнивается со скоростью света и "хвост" выпадающего поля, дошедший до этой границы излучается по касательной и не может вернуться поэтому назад в первую среду [6]. В отличие от отражения от плоскости, убывание выпадающего поля происходит не по экспоненте, но и это распределение легко найти. Оно происходит по закону  $E = E_i\tau_F \exp[i \int k_\rho(\rho) d\rho]$ , где

$$k_\rho(\rho) = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k_t r_{cv}}{\rho}\right)^2} = ik \sqrt{\left(\frac{r_{cv}n \sin\theta_i}{\rho}\right)^2 - 1} \quad (25)$$

Как видно, на расстоянии  $\rho_t$  затухание прекращается и  $k_\rho$  из мнимого становится действительным. Таким образом, беря интеграл, мы получаем окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= |T_F|^2 \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{n \cos \theta_i} \exp \left[ -2k \int_{r_{cv}}^{\rho_r} \sqrt{\left(\frac{r_{cv}n \sin \theta_i}{\rho}\right)^2 - 1} d\rho \right] \\ &= \frac{4nP \cos \theta_i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{n^2 - 1 - n^2(1 - P^2) \cos^2 \theta_i} e^{-2\Psi(\theta_i)} \\ \Psi(\theta_i) &= kr_{cv} \left[ n \sin \theta_i \operatorname{arccosh}(n \sin \theta_i) - \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$



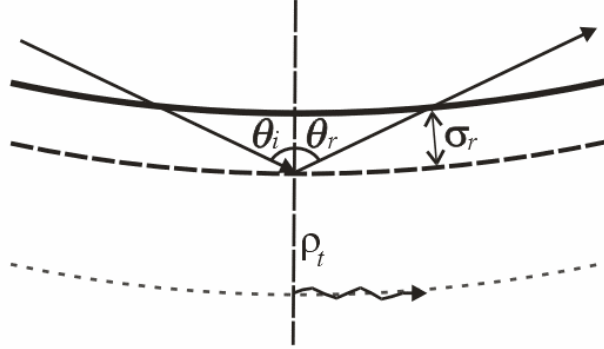


Рис. 3: Нарушенное полное внутреннее отражение от выпуклой границы и фиктивная поверхность

### 1.5 Собственные частоты и добротности произвольных тел вращения

Чтобы оценить собственную добротность мод типа шепчущей галереи в квазиклассическом приближении, нужно учесть потери внутренних лучей при каждом отражении от поверхности резонатора. Добротность определяется простым выражением [7]:

$$Q = \frac{2\pi n}{\alpha \lambda}, \quad (27)$$

где  $\alpha$  соответствует потерям на единицу длины пути луча.

Путь можно представить как множество отрезков ломаной, длина каждого из которых  $L_n = 2r_{cv} \cos \theta$ , где  $r_{cv}$  — радиус кривизны геодезической кривой на поверхности. Пусть потери энергии при отражении на данном отрезке пути равны  $\mathcal{T}(\theta)$  и  $\alpha_n = \mathcal{T}(\theta, r_{cv})/L_n$ . Усредняя  $\alpha_n$  по одному витку геодезической кривой, касающейся верхнего каустического конуса на расстоянии  $z_m$  от экватора, спускающегося вниз до нижнего каустического конуса  $-z_m$  и возвращающегося назад (см. Лекцию 7), получим полные потери:

$$Q = \frac{2\pi n L_g}{\lambda} \left[ \oint \frac{\mathcal{T}(\theta)}{2r_{cv}(\theta) \cos \theta} dl \right]^{-1} = \frac{2\pi n L_g}{\lambda} \left[ \int_{-z_m}^{z_m} \frac{\mathcal{T}(\theta)}{r_{cv}(\theta) \cos \theta} \frac{dl}{dz} dz \right]^{-1} \quad (28)$$

Это выражение можно использовать для оценки добротности в произвольных диэлектрических резонаторах с модами типа шепчущей галереи, причем не только для вычисления излучательной добротности, но и для расчета потерь на рассеяние и поглощение на поверхности. Потери на излучение при отражении от изогнутой поверхности были найдены выше, их можно также получить, решая модельную задачу в цилиндре, когда  $r_{cv} = a$  и

$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - m^2/(kna)^2} \simeq \sqrt{-\alpha_q}(m/2)^{-1/3}$  являются постоянными моды:

$$\mathcal{T}_0 = \frac{4\pi na \cos \theta_0}{\lambda Q_0}. \quad (29)$$

При использовании приближений Дебая для функций Неймана в выражении для излучательной добротности, полученном из точного уравнения сферы, получается то же самое выражение (26).

**Задание 8.1** Постройте и сравните зависимость  $\mathcal{T}(\theta_i)$  1) из формул Френеля при отражении от плоской поверхности; 2) для изогнутой поверхности для ТЕ и ТМ мод в геометрическом приближении (26), 3) приближении (29) вместе с аналитическим решением для добротности через специальные функции в Лекции 4. Для расчетов положите  $m = 100$ ,  $n = 1.457$ .

Произвольную поверхность тела вращения часто можно аппроксимировать эквивалентным сфероидом, принимая во внимание, что поле мод типа шепчущей галереи сосредоточено около экваториальной плоскости, вблизи поверхности резонатора и использовать напрямую полученный результат.

Можно построить также более общую теорию в случае произвольного выпуклого тела вращения. Сначала определим семейства каустических поверхностей. Первое семейство каустических поверхностей можно найти, пользуясь приближением [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_c(s) &\simeq -\frac{1}{2}\gamma^2 r_{cv}^{1/3}(s) + O(\gamma^4) \\ \cos \theta_i(s) &= \gamma r_{cv}^{-1/3}(s), \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\sigma_c(s)$  — нормальное расстояние от точки  $s$  на поверхности тела до каустической поверхности,  $\gamma$  — параметр семейства,  $r_{cv}$  — радиус кривизны геодезической кривой (кривизна поверхности по направлению распространения луча), а  $\cos \theta_i$  — угол падения луча в точке  $s$ . Если найдена каустическая поверхность из первого семейства, заданная параметрически как  $\rho = g(z)$ , то можно найти и второе семейство поверхностей, заданных параметрически как  $h(z)$  и ортогональных к любой поверхности из первого семейства при различных  $P$ . Геодезическая кривая на поверхности определяется следующим выражением:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\rho_c \sqrt{1 + g'^2}}{g(z) \sqrt{g^2(z) - \rho_c^2}}, \quad (31)$$

где  $\rho_c = g(z_m)$  — радиус окружности на каустике на максимальном расстоянии от экваториальной плоскости. Длина геодезической кривой участка:

$$ds = \frac{g \sqrt{1 + g'^2}}{\sqrt{g^2 - \rho_c^2}} dz. \quad (32)$$

Длина геодезической кривой, соединяющей точки  $\phi_1$  и  $\phi_2$ :

$$L_1^g = 2 \int_{-z_m}^{z_m} \frac{g\sqrt{1+g'^2}}{\sqrt{g^2-\rho_c^2}} dz. \quad (33)$$

Длина дуги от  $\phi_0 = 0$  до  $\phi_c = 2 \int_{-\eta_c}^{\eta_c} \frac{d\phi}{du} du$ :  $L_2^g = \rho_c \phi_c$ .

$$L_2^g = 2 \int_{-z_m}^{z_m} \frac{\rho_c^2 \sqrt{1+g'^2}}{g\sqrt{g^2-\rho_c^2}} dz. \quad (34)$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} nk(L_1^g - L_2^g) &= 2nk \int_{-z_m}^{z_m} \frac{\sqrt{1+g'^2} \sqrt{g^2-\rho_c^2}}{g} dz \\ &= 2\pi(p + 1/2). \end{aligned} \quad (35)$$

Точно также, для геодезической кривой на каустической поверхности другого семейства  $\rho = h(z)$  получим:

$$\begin{aligned} nk(L_1^h - L_2^h) &= 2nk \int_{z_c}^{z_0} \frac{\sqrt{1+h'^2} \sqrt{h^2-\rho_c^2}}{h(z)} dz \\ &= 2\pi(q - 1/4). \end{aligned} \quad (36)$$

Третье условие:

$$2\pi nk \rho_c = 2\pi|m|. \quad (37)$$

Для сфероидальной системы координат эта система эквивалентна той, что была получена в предыдущей лекции для сфероида.

Добротность можно вычислить, если известно  $\mathcal{T}(\theta)$ , используя соотношения:

$$\begin{aligned} r_{cv} &= \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} = \frac{\rho^3 (1 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho_m^2 (1 + \rho'^2) - \rho \rho'' (\rho^2 - \rho_m^2)} \\ \frac{dl}{dz} &= \frac{\rho(z) \sqrt{1 + \rho'(z)^2}}{\sqrt{\rho^2(z) - \rho_m^2}} \\ L_g &= 4 \int_0^{z_m} \frac{\rho(z) \sqrt{1 + \rho'(z)^2}}{\sqrt{\rho^2(z) - \rho_m^2}} dz \\ \cos(\theta) &\simeq \sqrt{2\sigma_c / r_{cv}}, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\rho_m = \rho(z_m)$  — расстояние от оси  $z$  до наивысшей точки геодезической кривой,  $\sigma_c$  — нормальное расстояние от поверхности до каустической поверхности.

Используя полученные соотношения для потерь при однократном отражении от изогнутой поверхности, найдем выражение для собственной излучательной добротности сфероида:

$$\begin{aligned}
r_{cv} &= a \frac{(1 + z^2(a^2 - b^2)/b^4)^{3/2}}{1 + z_m^2(a^2 - b^2)/b^4} \simeq a \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \eta_c^2 + \frac{3}{2} \frac{a^2 - b^2}{b^4} z^2 \right) \\
\sigma_c &\simeq \zeta_0 \frac{b^2}{2a} \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{2b^4} z^2 \right) \\
\cos \theta &\simeq \sqrt{-\alpha_q} \left( \frac{l}{2} \right)^{-1/3} \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \eta_c^2 - \frac{a^2 - b^2}{2b^4} z^2 \right) \\
L_g &\simeq 2\pi b + \frac{\pi}{2} \frac{a^2 - b^2}{b} \eta_c^2.
\end{aligned} \tag{39}$$

Подставляя  $z = \eta_c \cos \psi$ , получим:

$$\begin{aligned}
Q &\simeq \frac{\pi \sqrt{n^2 - 1} l}{4Pn} \left[ \int_0^{\pi/2} e^{-2\Psi(\psi)} d\psi \right]^{-1} \simeq \frac{\sqrt{n^2 - 1} l}{2Pn} e^{2\psi_0} \frac{e^{\psi_1}}{I_0(\psi_1)} \\
\Psi_0 &= nka \left[ 1 - \frac{(2p+1)a(a^2 - b^2)}{lb^3} \right] \\
&\times \left[ \operatorname{arccosh}(n) \left( 1 + \frac{\alpha_q}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^{-2/3} \right) - \sqrt{1 - 1/n^2} \right] \\
\Psi_1 &= \Psi_0 \frac{3(2p+1)a(a^2 - b^2)}{2b^3 l}.
\end{aligned} \tag{40}$$

На рисунке (рис.3) показана зависимость излучательной добротности от параметра сплюснутости сфероида для ТЕ и ТМ моды при  $l = m = 100$  (фундаментальная мода) и  $l = 100, m = 98$ . Сплюснутость  $f = 0$  ( $a = b$ ) соответствует идеальной сфере.

**Задание 8.1** *Рассчитайте добротность сфероида, вызванную рассеянием на поверхностных неоднородностях, если добротность сферы, обусловленная теми же потерями при среднем размере неоднородностей  $\sigma$  и длине корреляции  $B$  имеет вид [9]:*

$$Q_{ss} = \frac{3\lambda^3 a}{8\pi B^2 \sigma^2}. \tag{41}$$

## Список литературы

- [1] S. G. S. G. Roll, Th. Kaiser, J. Opt. Soc. Am. A **15**, 2879 (1998).
- [2] Г. ван-де-Хюлст, *Рассеяние света малыми частицами*, М.: Ин. лит-ра, 1961.
- [3] Х. Хаус, *Волны и поля в оптоэлектронике*, М., Мир, 1988.

- [4] М. Борн и Э. Вольф, *Основы оптики*, 2-е изд., М., Наука, 1988.
- [5] Н. F.Goos, Ann. Phys. **1**, 333 (1947).
- [6] G. Roll and G. Schweiger, J. Opt. Soc. Am. A **17**, 1301 (2000).
- [7] М. L. G. V. B. Braginsky and V. S. Ilchenko, Phys. Lett. A **137**, 393 (1989).
- [8] В.М. Бабич, В.С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, М.: Наука, 1972.
- [9] A. D. P. M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko, J. Opt. Soc. Am. B **17**, 1051 (2000).