

Спецкурс “Оптические микрорезонаторы”.  
Лекция 10. Связь с оптическими  
резонаторами с модами типа шепчущей  
галереи.

М.Л.Городецкий

26 сентября 2007 г.

*(Перевести все в СИ)*

С точки зрения простейшей геометрической оптики, если внутри сферического резонатора луч циркулирует так, что падает на его поверхность под углом  $\theta_i$  большим чем угол полного внутреннего отражения, то такой луч никогда не сможет покинуть резонатор. Из соображений взаимности, если луч, циркулирующий внутри, не может выйти из резонатора, то и никакой луч, вошедший в резонатор, не может превратиться в такую бесконечно долго циркулирующую волну. На одном из заданий в Вечерней Физической Школе МГУ, когда я еще был школьником, была задана следующая простая задачка (Рис. 1). Требовалось определить, как надо направить луч на стеклянный шар, чтобы после преломления луч упал на поверхность под углом большим полного внутреннего отражения. В рамках школьной программы задача решения не имеет. Легко показать, что все преломленные и отраженные лучи будут лежать в одной плоскости, проходящей через падающий луч и центр шара, и если перерисовать картинку в этой плоскости, отрицательный ответ становится очевиден. Из соображений симметрии относительно оси  $OC$  угол падения  $\theta_i$  равен углу преломления  $\theta_2$ , и поскольку луч вошел в шар, то этот угол меньше, чем угол полного внутреннего отражения. В те времена я, конечно, не знал, что эта простая геометрическая задача гораздо интереснее и сложнее, чем кажется, да и преподаватель был удовлетворен таким простым ответом, но задачка почему-то запомнилась.

Теперь мы с Вами знаем (см. Лекцию 8), что решение у задачи в рамках более продвинутой квазигеометрической волновой оптики имеется, и этот ответ парадоксален – входной луч должен проходить мимо резонатора и даже, чтобы возбудить фундаментальную моду, на весьма порядочном расстоянии  $((n - 1)a)$  от его поверхности, сравнимом с радиусом резонатора. Тем не менее, это свойство мод шепчущей галереи, ответственное за появление излучательных потерь, не позволяет для реальных, наиболее часто применяющихся высокодобротных резонаторов диаметром в десятки

Рис. 1: Школьная задача

и сотни микрометров обеспечить связь со свободными пучками. Действительно, согласно выражению для коэффициента прохождения из Лекции 8 для  $\ell = 100$  ( $a \simeq 15$  мкм при  $\lambda = 0.63$  мкм) получаем  $\mathcal{T} \simeq 2 \times 10^{-12}$ , а для  $\ell = 1000$  ( $a \simeq 140$  мкм) получаем  $\mathcal{T} \simeq 6 \times 10^{-158}$ ! Для того чтобы тем не менее связаться с резонатором надо каким-то образом уменьшить потенциальный барьер, создать в нем что-то типа окошка, через которое с резонатором можно было бы связаться. Исторически впервые с кварцевым шариком удалось связаться потому, что на поверхность в области моды попала светорассеивающая пылинка [1]. Естественно, на пылинку всякий раз рассчитывать не приходится и надо изыскать более воспроизводимый способ. Вспомним квазиклассическое приближение и эквивалентный потенциал, образующий барьер для фотонов. Если мы поднесем в какой-то точке вблизи поверхности резонатора в области моды диэлектри с показателем преломления большим чем показатель преломления резонатора, мы можем тем самым создать то самое требуемое "окошко", пропускание которого можно легко регулировать, меняя расстояние до поверхности резонатора и толщину локального потенциального барьера.

Эффективное возбуждение мод шепчущей галереи может быть осуществлено с помощью призмного элемента ввода, известного в интегральной оптике и служащего для связи плоских пучков с модами планарных световодов.

Рассмотрим возбуждение сферического резонатора с модами типа шепчущей галереи пучком, падающим на внутреннюю поверхность призмы под углом, большим угла полного внутреннего отражения (Нис.2). Резонатор при этом помещается на некотором малом расстоянии  $d \sim \lambda$  от призмы так, что внешнее поле мод ШГ существенно проникает в полупространство призмы. Априори очевидно, что для эффективного взаимодействия с модами ШГ возбуждающий пучок должен быть сфокусирован в области "касания". Приведенный ниже расчет имеет целью выяснить оптимальные параметры возбуждающего пучка (ориентация, угловой спектр и т.п.).

С точки зрения простейшей геометрической оптики, если угол падения луча, отражающегося от внутренней поверхности резонатора равен  $\theta_i$ , то

Фундаментальные моды типа  $TE_{\ell\ell q}$  и  $TM_{\ell\ell q}$  могут эффективно возбуждаться с помощью гауссового пучка (Рис.2), сфокусированного на внутреннюю поверхность призмного элемента связи (с углом преломления  $n_c$  большим чем показатель преломления резонатора  $n_m$ ) в области вблизи резонатора под оптимальным углом  $\Phi = \arcsin(n_m/n_c)$ . Для каждой моды можно рассчитать добротность связи (нагружение)  $Q_c$ , которая характеризует потери энергии моды вследствие связи с излучательными модами полупространства призмы. Далее будем называть такие моды пространственными (угловыми) спектрами переизлучения мод шепчущей галереи с призмным элементом связи. Оптимальная связь достигается если соб-

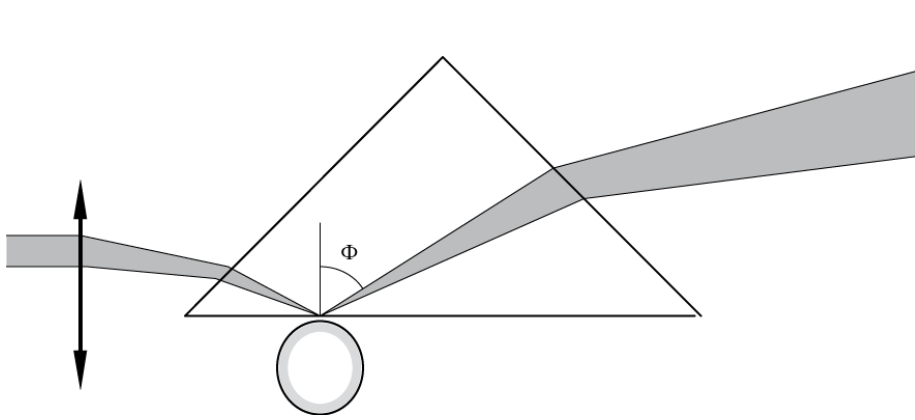


Рис. 2: Схема возбуждения мод типа шепчущей галереи с помощью призмы

ственная добротность резонатора больше добротности связи и если угловой спектр возбуждающего пучка совпадает с угловым спектром переизлучения. Основным результатом работы [2] состоял в том, что пространственный спектр переизлучения моды  $Y_{\ell\ell}$  представляет собой гауссов луч, совпадающий с плоскостью ориентации фундаментальной моды в сфере. Согласно принципу взаимности, гауссов луч с оптимальными угловыми апертурами (оптимальный луч должен быть эллиптическим) и углом падения, совпадающий по параметрам со спектром переизлучения хорошо возбуждает фундаментальную моду резонатора в плоскости падения.

Ситуация меняется для сфероидального резонатора, а ведь идеальных сферических резонаторов не бывает: любая мода  $Y_{\ell\ell}$ , наклоненная по отношению к экватору сфероида, будет прецессировать, и единственная устойчивая фундаментальная мода может быть возбуждена лишь в плоскости экватора сфероида резонатора. В соответствии с предшествующим анализом, гауссовы пучки, наклоненные под углом  $\Theta = \pm \arccos(m/\ell)$ , возбуждают невырожденную моду  $Y_{\ell m}$  (Рис.3). Другое очевидное следствие – *появление второго выходного луча* в пространственном спектре переизлучения моды  $Y_{\ell m}$ , симметричного входному лучу относительно экваториальной плоскости сфероида. Таким образом, полный спектр излучения будет состоять из двух гауссовых пучков (двух максимумов) исходящих из области контакта. Один луч, совпадающий по направлению с возбуждающим оптимальным лучом, будет излучаться через целое число периодов прецессии, а другой – через полуцелое.

Пространственные спектры переизлучения резонатора, связанного с призмой могут быть найдены и непосредственно как результат дифракции Фраунгофера ближнего поля моды, проникающего в призму из-за нарушенного полного внутреннего отражения. Размер зоны излучения определяется масштабом спада поля вне резонатора, которое описывается функцией Ханкеля первого рода  $h_{\ell}^{(1)}(k_0 r)$ , но при больших порядках  $\ell$  может быть ап-

проксимировано экспонентой  $\exp(-d/r^*)$ , где  $d$  – расстояние от поверхности резонатора и  $r^* = \lambda/(2\pi\sqrt{n_m^2 - 1})$ . Фактически, область связи с резонатором является гауссовым окном  $\exp[-\frac{y^2+z^2}{2Rr^*}]$  для спектрального преобразования ближнего поля моды в дальней зоне. Для больших значений  $\ell - m$ , присоединенные функции Лежандра в этом окне могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\ell^m(\cos \theta) &\simeq B_{\ell m} \cos(\mu(\theta - \pi/2) + (\ell - m)\pi/2), \\ \mu^2 &= \ell(\ell + 1) - m^2, \\ B_{\ell m} &= \begin{cases} \frac{(\ell+m-1)!!(\ell-m-1)!!}{(\ell-m)!}, & \text{при четных } \ell - m, \\ \frac{(\ell+m)!!(\ell-m)!!}{(\ell-m)!}, & \text{при нечетных } \ell - m. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Как известно из теории дифракции, поле в дальней зоне (угловой спектр) можно найти из распределения поля на поверхности экрана, в данном случае на поверхности призмы с помощью двумерного преобразования Фурье ([3]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-k^2\sigma^2/2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} F(k_x = \sqrt{n_c^2 k_0^2 - k_y^2 - k_z^2}, k_y, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint U(x=0, y, z) e^{ik_y y + ik_z z} dy dz \\ U_{m=\ell} &\propto e^{-ily/a - z^2\ell/(2a^2) - (y^2+z^2)/(2ar^*)}, \\ U_{m \neq \ell} &\propto e^{-imy/a - (y^2+z^2)/(2ar^*)} \cos(\mu z + \pi(\ell - m)/2) \end{aligned} \quad (3)$$

Для определенности взято распределение поля для моды ТЕ и лишь основная компонента поля. Таким образом, выражая компоненты волнового вектора через углы (Рис. 3), получаем

$$\begin{aligned} U(\Theta, \Phi) &\propto \int U(y, z) e^{-in_c k \sin \Phi \cos \Theta z - in_c k \sin \Phi \sin \Theta x} dy dz = \\ &2\pi ar^* e^{-(m - n_c k a \sin \Phi \cos \Theta)^2 r^*/(2a)} \times \\ &\left( e^{-(\mu - n_c k a \sin \Phi \sin \Theta)^2 r^*/(2a)} + (-1)^{\ell-m} e^{-(\mu + n_c k a \sin \Phi \sin \Theta)^2 r^*/(2a)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Расчет интеграла (при  $\ell > 1$  и  $k_x, k_y < k$  – что справедливо при  $n_c > n_m$ , при интегрировании можно перейти к бесконечным пределам) дает два гауссовых луча с одинаковыми фазами для четных  $\ell - m$  и в противофазе для нечетных  $\ell - m$ . Поляризация лежит при  $\ell - m \ll \ell$  примерно в плоскости излучения для мод ТМ и перпендикулярно ей для мод ТЕ. Дополнительный учет второй компоненты поля  $E_\phi$  даст дополнительный, малый при

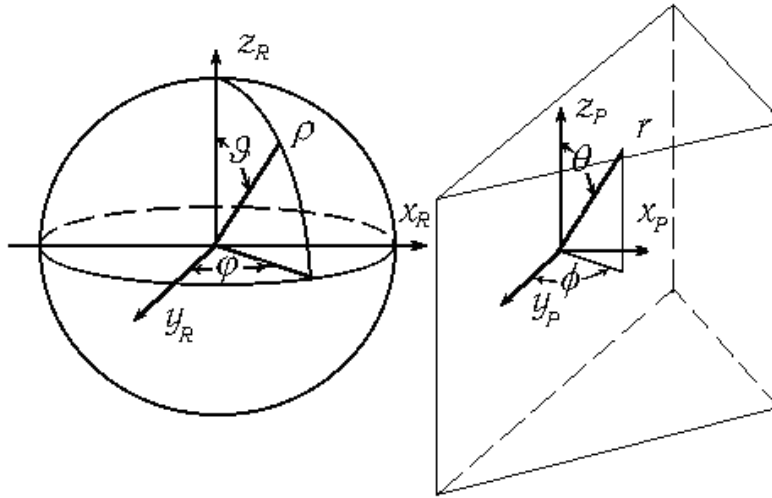


Рис. 3: Система координат в микросфере и элементе связи

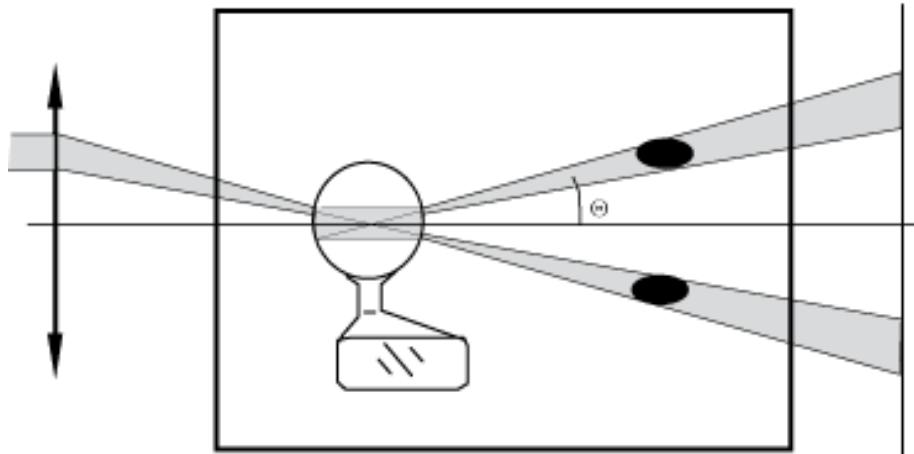


Рис. 4: Связь с модами типа шепчущей галереи в диэлектрическом сфероиде. Входной луч связывается с копланарной фундаментальной циркулярной модой  $Y_{\ell\ell}$ . Прецессируя вокруг оси симметрии сфероида (совпадающей с осью ножки), фундаментальная мода  $Y_{\ell\ell}$  1) формирует стационарную моду  $Y_{\ell m}$  и 2) образует два гауссовых луча переизлучения в призму.

$\ell - m \leq m$  поворот поляризации. Углы и угловые апертуры определяются следующими выражениями (все внутри призмы):

$$\begin{aligned}
U(\Theta, \Phi) &\propto e^{-\frac{(\Theta - \Theta_0)^2}{2\Delta\Theta^2} - \frac{(\Phi - \Phi_0)^2}{2\Delta\Phi^2}} \\
\sin \Theta_0 &= \pm \frac{\mu}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \simeq \pm \sqrt{1 + 2p} \ell^{-1/2}, \\
\sin \Phi_0 &= \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{n_c k_0 a} \simeq \frac{n_m}{n_c} \left[ 1 - \frac{\alpha_q}{2} \left( \frac{\ell}{2} \right)^{-2/3} \right] \\
\Delta\Theta^2 &= \frac{\sqrt{n_m^2 - 1}}{n_c^2 k_0 a \sin^2 \Phi_0} \simeq \frac{\sqrt{n_m^2 - 1}}{\ell n_m} \\
\Delta\Phi^2 &= \frac{\sqrt{n_m^2 - 1}}{n_c^2 k_0 a \cos^2 \Phi_0} \simeq \frac{\sqrt{n_m^2 - 1} n_m}{\ell(n_c^2 - n_m^2)}, \\
&\text{если } \ell = m, \text{ то} \\
\Theta_0 &= 0, \quad \sin \Phi_0 \simeq \frac{n_m}{n_c} \left[ 1 - \frac{\alpha_q}{2} \left( \frac{\ell}{2} \right)^{-2/3} \right] \\
\Delta\Theta^2 &= \frac{n_m + \sqrt{n_m^2 - 1}}{n_c^2 k_0 a \sin^2 \Phi_0} \simeq \frac{n_m + \sqrt{n_m^2 - 1}}{\ell n_m}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Использованные приближения для полиномов Лежандра справедливы если  $\mu > \sqrt{\ell}$ , т.е. когда зона связи покрывает только малую часть распределения по углу  $\theta$ . Однако, прямое численное интегрирование без использования приближения 1 показывает, что количественные оценки 5 существенно не меняются и двухлучевые спектры излучения характерны для всех мод вплоть до  $\ell - m = 1$  и вплоть до малых  $\ell \sim 50$ . Поскольку волновое число  $k$  зависит от  $q$  и  $\ell$  (и в меньшей степени от  $m$  при малой эллиптичности), углы 5 зависят от всех трех индексов. Таким образом, моды шепчущей галереи могут быть идентифицированы по их пространственным спектрам излучения, хотя в случае больших  $\ell \gg 1$  зависимости от  $p = \ell - m$  и особенно  $q$  являются довольно слабыми и идентификация требует большой точности картирования распределения поля.

Добротность связи с нагрузкой проще всего найти из соотношения полной энергии  $\mathcal{E}$  моды и мощности  $P$  излучаемой в призму:

$$Q_c = \frac{\omega \mathcal{E}}{P} = \frac{k_0 n_m^2 \mathbf{M}}{n_c} \frac{\int |\mathbf{E}|^2 dv}{\int_{\mathbf{C}} |\mathbf{E}|^2 ds} \tag{6}$$

Излучаемую мощность можно найти проинтегрировав угловой спектр по всем углам, или, возвращаясь к координатному представлению, проинтегрировать квадрат поле по поверхности призмы:

$$P = \frac{c n_c \epsilon_0}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int F^2(k_x, k_y) dk_x dk_y = \frac{c n_c \epsilon_0}{2} \int \int |E|^2 dx dy = \tag{7}$$

Используя для аппроксимации формулу Стирлинга, окончательно получаем [4] (для простоты в окончательном выражении положено  $n_c \simeq n_m = n$ ):

$$Q_c \simeq 2 \left( \frac{n^2 - 1}{n} \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^{3/2} e^{2kd\sqrt{n^2-1}} \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{1+\sqrt{n^2-1}}}, & \text{при } \ell = m, \\ \sqrt{2\pi}\sqrt{\ell - m}, & \text{при } \ell > m \end{cases} \quad (8)$$

### 0.1 Экспериментальное исследование угловых спектров переизлучения мод шепчущей галереи в призму

В работе [4] пространственные спектры переизлучения кварцевых микросфер в призму исследовались экспериментально. Наблюдения проводились в видимом диапазоне, на длине волны гелий-неонового лазера 633 нм. Поскольку частотный диапазон возможной перестройки частоты He-Ne лазера достаточно мал (менее 1 ГГц;  $\Delta\omega/\omega < 2 \times 10^{-6}$ ), использовались большие резонаторы диаметром около 250 мкм ( $\ell \sim 1800$ ), что обеспечивало достаточно плотный частотный спектр различных мод типа шепчущей галереи.

При формировке сферического резонатора в пламени микрогорелки ножка создавала осесимметричное возмущение поля сил поверхностного натяжения. В результате окончательная форма резонатора отличалась от идеальной сферы, и в области локализации моды она может быть приблизительно описана как эллипсоид вращения. Измеренный с помощью микроскопа эксцентриситет сфероида составил 0.15 (разность между полуосями  $1 \pm 0.3\%$ ).

Схема эксперимента очевидна из (Рис.2,4). Лазерный луч фокусировался с помощью широкоапертурного микрообъектива (фокусное расстояние 5 мм, числовая апертура 0.8) в призме (стекло К8,  $n_c = 1.515$  для  $\lambda = 633$  нм). Фокальное пятно помещалось в точке полного внутреннего отражения (на передней поверхности призмы). Сферический микрорезонатор помещался вблизи фокального пятна на контролируемом малом расстоянии от ( $d \sim 0.1\lambda$ ) поверхности призмы. Ориентацию входного луча (углы  $\Theta$  и  $\Phi$ ) можно было изменять смещением лазера в плоскости перпендикулярной оси входного луча и объектива. Малые смещения луча достигались передвижением в поперечной плоскости с помощью микрометрических подач объектива. Угловые апертуры сфокусированного гауссового луча варьировались посредством предварительного телескопического расширения лазерного луча до его ввода в микрообъектив. Пространственные спектры переизлучения и отраженная от призмы часть входного луча наблюдались и регистрировались с помощью фотоаппарата на светлом экране. Для измерения добротности вместо экрана на оптимальном расстоянии помещался фотодиод и добротность измерялась стандартным методом по ширине резонансной кривой при калиброванном свипировании лазера пьезоподвижкой его переднего зеркала. При изменении расстояния между резонатором и призмой наблюдаемая добротность изменялась в пределах между  $Q_c$  (при этом ширина резонансной кривой превышала диапазон перестройки и не

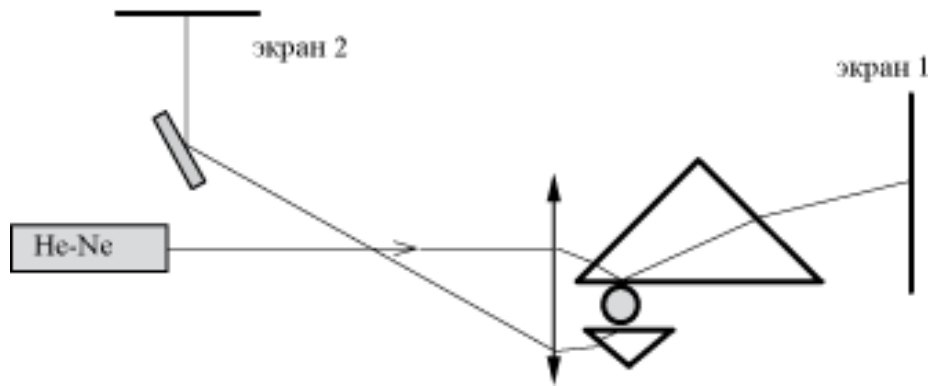


Рис. 5: Оптическая установка для наблюдения "чистых" спектров переизлучения мод типа шепчущей галереи и непосредственного наблюдения распределения поля в зоне контакта резонатора с призмой.

могла быть точно измерена, а лишь оценивалась) и собственной добротностью  $Q_0$  (асимптотическое значение получающееся при постепенном увеличении зазора). В наших экспериментах  $Q_0$  изменялась между  $(6 \div 8) \times 10^8$  для мод с  $q = 1$  и  $(3 \div 6) \times 10^7$  для более глубоких мод с  $q \sim 5$ .

На начальном этапе, резонатор приводился в соприкосновение с поверхностью призмы в области связи. Оцениваемая нагруженная добротность при этом изменялась между  $Q_c \sim 2 \times 10^5$  для мод с  $\ell - m = 0$  и  $Q_c \sim 2 \times 10^6$  для мод с  $\ell - m \sim 100$  в согласии с формулой 6. После этого свипирование частоты лазера отключалось. Меняя углы  $\Theta$  и  $\Phi$  можно было наблюдать эффективную связь и переизлучение различных групп мод в соответствии с результатами предыдущего раздела. В нагруженном состоянии резонансы соседних мод в частотном области заметно перекрывались. При этом на заданной частоте лазера и при накрытии конусом отраженного луча лазером нескольких угловых пучков переизлучения от разных мод можно было одновременно возбуждать и несколько мод одновременно. На экране при этом наблюдались различные интерференционные картины, обусловленные перекрытием спектров переизлучения от разных мод и от входного пучка. После этого связь уменьшалась, резонатор отодвигался от поверхности призмы, и частота призмы подстраивалась под одну из мод с сузившимся резонансом. В этом случае мы наблюдали одномодовые угловые спектры переизлучения добавленные к отраженному лучу. (Рис. 6. а). При включении медленного свипа частоты, наблюдались попеременные вспышки на экране пятен переизлучения различных мод.

Для наблюдения "чистых" спектров переизлучения от мод мы использовали дополнительную призму, подносимую с другой стороны резонатора (схема эксперимента показана на (Рис.5)). Выходной пучок попадал в апертуру входного объектива и выходил назад в сторону лазера, формируя два параллельных луча, соответствующих двум угловым максимумам



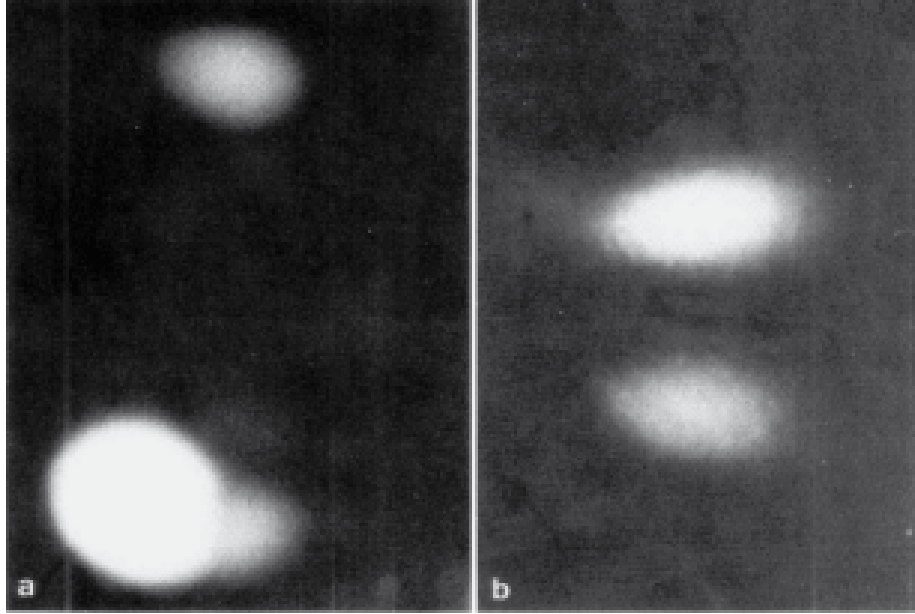


Рис. 6: Угловые спектры переизлучения с одной и двумя призмами.

пространственного спектра переизлучения. Выход с помощью зеркала перенаправлялся на другую линзу, которая воспроизводила угловой спектр переизлучения данной моды в призму, который и наблюдался на втором экране. На Рис.6.b представлен полученный с помощью такой техники “чистый” спектр для моды  $\ell - m = 4$ .

Показанная на Рис.5 схема позволила получить и действительное изображение конфигурации поля моды области связи между призмой и резонатором. Это достигалось небольшим отводом входного объектива от призмы и формированием при этом оптической схемы типа микроскопа. Действительное изображение поля моды при этом получалось с увеличением около 1000 (размер изображения на экране около 1 см). Соответствующие изображения для разных мод показаны на Рис.7. Они воспроизводят фрагменты соответствующего распределения  $P_\ell^m(\cos \theta)$  “видимый” через гауссово окно, получающееся в области контакта призмы с резонатором. Рис.7.c, полученный для моды с  $\ell - m \simeq 70$  иллюстрирует корректность косинусного приближения (1) для широтного распределения поля вблизи области связи при больших  $\ell - m$ .

Кроме того, были непосредственно сфотографированы зоны локализации светового поля вблизи поверхности резонатора для разных мод. В частично нагруженном резонаторе ( $Q \sim 1 \times 10^7$ ) при остановленном сканировании частоты можно было удерживать моду в резонансе в течение достаточно долгого времени. При мощности лазера  $\sim 1$  мВт и при времени экспозиции около 1 мин оказалось возможным через микроскоп сфотографиро-

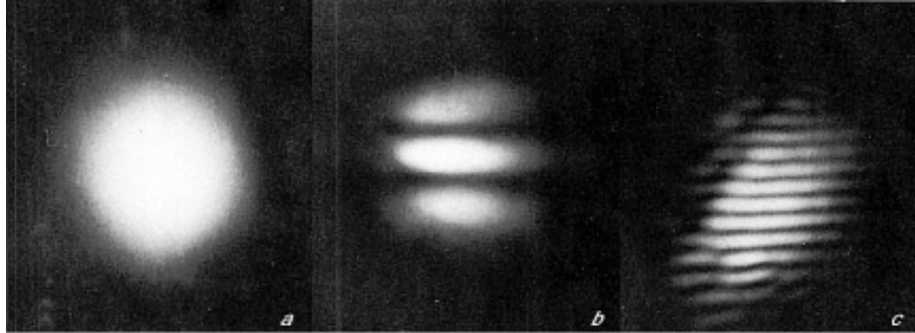


Рис. 7: Картины распределения поля мод типа шепчущей галереи в ближней зоне. (a)  $\ell - m = 0$  (b)  $\ell - m = 2$  (c)  $\ell - m \simeq 70$

вать картины спеклов, получающиеся в результате слабого поверхностного рассеяния на остаточных неоднородностях молекулярного размера энергии моды в области ее локализации (Рис.8).

Идентификация мод в наших экспериментах осуществлялась посредством сравнения наблюдаемых спектров переизлучения с расчетными.

Представленные в этой главе результаты иллюстрируют плодотворность прецессионного подхода для предсказания свойств высокодобротных мод шепчущей галереи в реальных твердотельных микрорезонаторах с малой асферичностью. Хотя понятие прецессии можно применить к описанию стационарных полей лишь условно, оно дает ясную физическое интерпретацию природы наблюдаемых явлений: 1) снятие частотного и пространственного вырождения мод шепчущей галереи в реальных сфероидальных резонатора; 2) возбуждение  $TE(TM)_{\ell m q}$  мод наклонными гауссовыми пучками; 3) излучение мод в призму в виде двух гауссовых лучей.

Мы ограничились лишь описанием связи мод шепчущей галереи с “мономатрическим” излучением. Однако, прецессионные свойства открывают новые перспективы для применения микрорезонаторов с призмным элементом связи как спектральных устройств. Во первых, двухлучевой спектр переизлучения позволяет создавать узкополосные оптические фильтры с высоким контрастом. Вместо использования двух призм для ввода и вывода излучения оказывается возможным связать входной луч с одним из лучей, а второй использовать для вывода мощности. Очевидно, что полные потери в таком фильтре могут быть около 3дБ (полная входная мощность делится поровну между двумя максимумами) и даже меньше при достижении режима критической связи  $Q_c = Q_0$  для выбранной моды.

Другая возможность состоит в том, чтобы сильно нагрузить резонатор и использовать его как линию задержки со временем задержки равным полупериоду прецессии. Поскольку частота прецессии может варьироваться в широком пределе от нескольких сот килогерц до десятков гигагерц в резонаторах разной формы и размера, оказывается возможны задержки

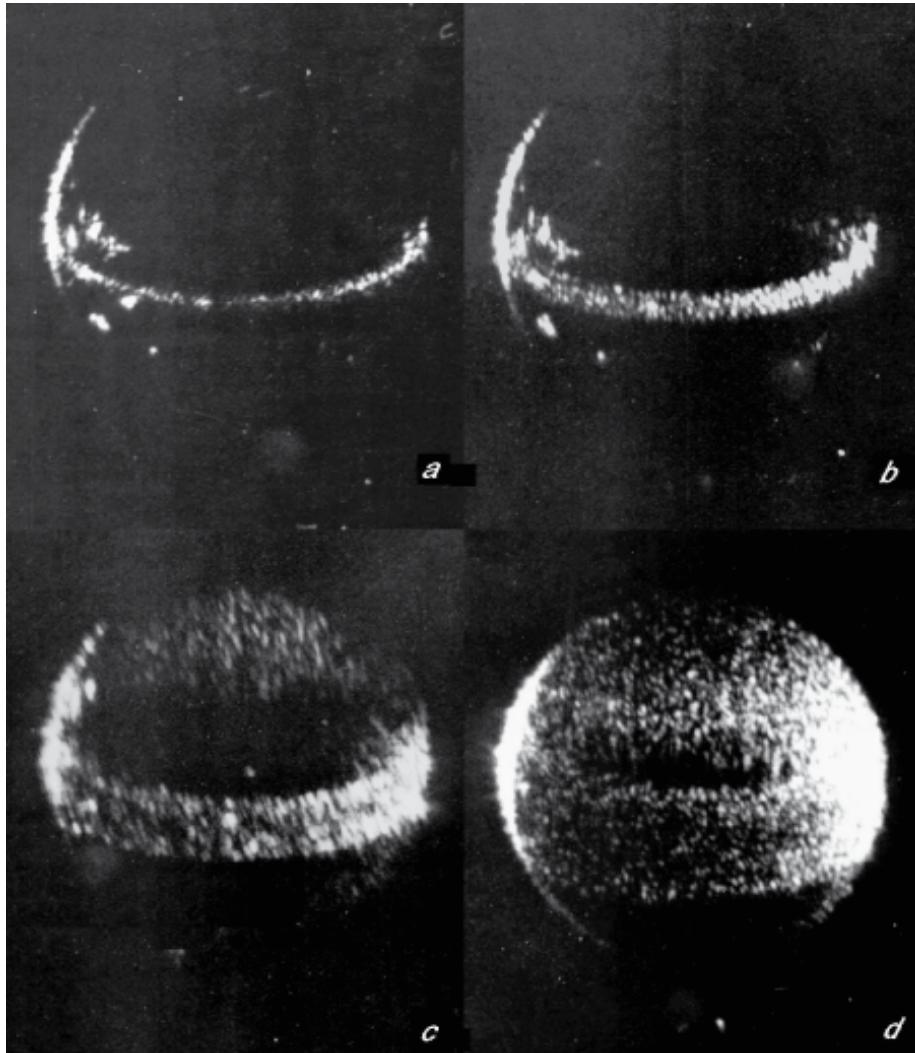


Рис. 8: Микрофотографии спекл-картин, получающихся вследствие рассеяние на остаточных поверхностных неоднородностях для различных мод типа шепчущей галереи, полученные для того же резонатора 4. а)  $\ell - m = 0$ , б)  $\ell - m = 2$ , в)  $\ell - m \simeq 15$ , г)  $\ell - m \simeq 70$

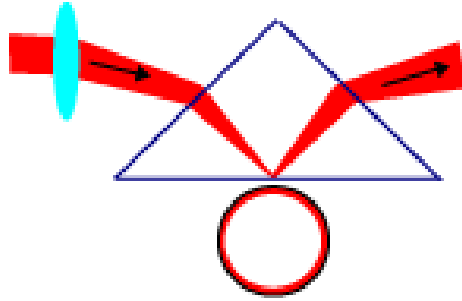


Рис. 9: Схема возбуждения микросферы с помощью призмы

$10^{-6} \div 10^{-10}$  с.

## 1 Теория оптимальной связи с высокодобротными модами типа шепчущей галереи

Моды типа шепчущей галереи можно возбудить в сферическом резонаторе несколькими способами. Для связи со свободными оптическими пучками наиболее естественным представляется использование, широко применяемого в интегральной оптике для возбуждения мод в планарных волноводах, призмного элемента связи [2, 4], основанного на эффекте нарушенного полного внутреннего отражения. Этот элемент подробно обсуждался в предыдущей главе. Для возбуждения резонатора луч лазера с помощью объектива вводится в призму и фокусируется на внутренней поверхности на которой происходит полное внутреннее отражение, а резонатор подносится к области фокального пятна снаружи на расстояние около 0.1 мкм.

Весьма интересен недавно предложенный и опробованный метод [5] при котором резонатор изготавливается из специального германиевого стекла, способного изменять в небольших пределах и запоминать изменения показателя преломления под действием ультрафиолетового облучения (подробнее см. [6]). На часть боковой поверхности готового резонатора ультрафиолетовым лучом с помощью маски наносится периодическая структура с пространственным периодом  $\Lambda = \lambda / (n - \sin \alpha)$  ( $\alpha$  - требуемый угол падения возбуждающего сфокусированного луча), также обеспечивающая согласование с свободным лазерным пучком. Такой элемент связи аналогичен также применяемому в интегральной оптике возбуждению планарных волноводов через гофрированный участок. Для практических применений весьма актуальна разработка элементов связи сферических микрорезонаторов с волоконными световодами. К настоящему времени продемонстрированы три способа:

1) Связь через сполитрованный сбоку до сердцевины участок волокна (аналогично тому как это делается в волоконных ответвителях) [7, 8, 9].

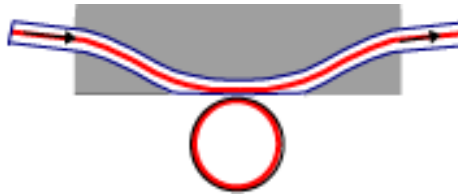


Рис. 10: Схема возбуждения микросферы с помощью сплюсненного волокна



Рис. 11: Схема возбуждения микросферы с помощью растянутого волокна

2) Связь через вытянутый на конус участок волокна [10], при этом моды сердцевинны переходят в моды оболочки, проникающие в окружающее пространство, и в некоторой области конуса с оптимальной толщиной обеспечивается синхронизм с модами резонатора [10];

3) Связь через торец косо срезанного под оптимальным углом волокна ("поросычий хвостик") [11]. Такой срез в общем-то аналогичен призме полного внутреннего отражения, и два волокна со срезами обеспечивают эффективный ввод и вывод.

Некоторой комбинацией призмного и последнего волоконного элемента является связь через срезанный под углом в области фокуса градан (градиентная линза, для свободных пучков, представляющая собой стержень с градиентным по сечению распределением показателя преломления, фокусное расстояние такой линзы зависит просто от длины стержня). Такой элемент связи, как бы совмещающий в себе и призму и объектив недавно был успешно применен в схеме стабилизации полупроводникового лазера с помощью микрорезонатора [12].

Все эти системы ввода излучения в резонатор основаны на эффективном обмене энергии между направляемой циркулирующей в резонаторе направ-

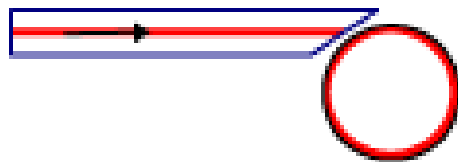


Рис. 12: Схема возбуждения микросферы с помощью косо срезанного волокна



Рис. 13: Схема возбуждения микросферы с помощью градиентной линзы

ляемой волной полного внутреннего отражения (модой ШГ) и выпадающим полем моды волновода или пятна полного внутреннего отражения элементе связи.

Априори очевидно, что эффективную связь можно ожидать при выполнении двух важных условий: 1) фазовый синхронизм и 2) существенное перекрытие полей двух волн, моделирующих, соответственно, моду ШГ и моду элемента связи. Хотя разумная связь и была продемонстрирована с разными элементами связи (до нескольких десятков процентов отбора мощности входного пучка в резонансе), их разработка и оптимизация сдерживалась отсутствием систематического теоретического подхода, позволившего бы количественно характеризовать работу разных устройств. Оставалось также неясным - возможно ли вообще обеспечить полный обмен энергией между бегущей волной в элементе связи и данной модой шепчущей галереи в сферическом высокодобротном микрорезонаторе. Ответы на эти вопросы являются критически важными для многих предложенных применений микросфер и особенно для экспериментов в области квантовой электродинамики резонатора.

Ниже представлен общий подход для описания связи в ближнем поле высокодобротных мод шепчущей галереи с модами, распространяющимися в призме, планарной или волноводной структуре. Представляемые теоретические результаты дают полное описание и дают рецепты для получения оптимальной связи в элементах разного типа. Следует обратить внимание на важность для достижения оптимальной связи введенного параметра  $Q_c$  нагруженной добротности и его соотношения с собственной добротностью  $Q_0$ .

### 1.1 Общие соображения

Рассмотрим возбуждение отдельной высокодобротной моды типа шепчущей галереи с высокой добротностью с помощью  $N$  бегущих мод в элементе связи. При этом элемент связи может иметь бесконечное число пространственных мод ( $N = \infty$ ), как, например, призма [2, 4] или планарный волновод, или только одну моду ( $N = 1$ , одномодовая связь), связанную с резонатором, как в вытянутом на конус волокне [10] или интегральном полосковом волноводе. Рассмотрим вначале простое описание системы, состоящей из резонатора и элемента связи, с помощью сосредоточенных параметров в квазигеометрическом приближении.

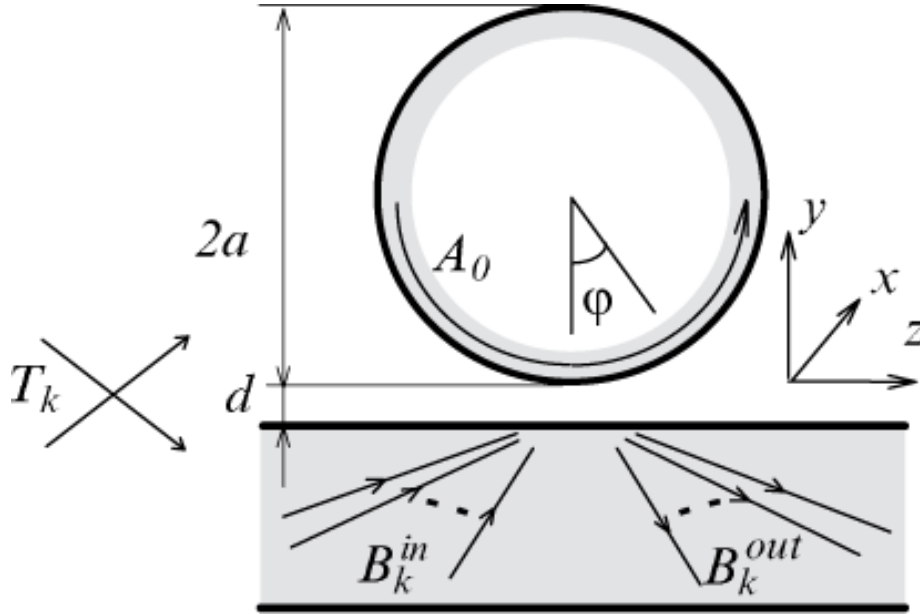


Рис. 14: Схема возбуждения мод шепчущей галереи в высокодобротном сферическом микрорезонаторе

Пусть  $A_0(t)$  – амплитуда циркулирующей моды полного внутреннего отражения в резонаторе (см. Рис. 14), моделирующая моду шепчущей галереи. Пусть мощность накачки распределена между ортонормированными модами в элементе связи так, что  $B_k(t)$  представляет амплитуду моды  $k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) и  $B^{in}(t)$  – медленно меняющаяся амплитуда возбуждающего поля, так что  $\sum |B_k^{in}(t)|^2 = |B^{in}(t)|^2$  определяет полную мощность накачки. Положим, что перекрестная связь между разными модами в элементе связи вблизи области взаимодействия (спил, вытянутый участок) без резонатора отсутствует. Эту чисто математическую проблему всегда можно обойти, выбрав в качестве мод не парциальные моды волновода, а локальные нормальные моды, однако в большинстве случаев связь между парциальными модами слаба, и ей действительно можно пренебречь.

Положим также, что область связи геометрически много меньше чем диаметр  $2a$  резонатора, так что можно ввести локальные действительные амплитудные коэффициенты передачи  $T_k$ , описывающие связь резонатора со всеми модами элемента связи (как направляемыми, так и вытекающими) и коэффициент внутреннего отражения –  $R$ . Будем обозначать массивы коэффициентов передачи и амплитуд как векторы  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{B}$ , соответственно. Если добротность моды резонатора достаточно велика, то каждый оборот моды дает только малый вклад в установление моды и поэтому  $1 - R \ll 1$ . В этом случае (пренебрегая для простоты поглощением и рассеянием в элементе связи, то есть, считая, что выполняется закон сохранения энергии

$R_k^2 = 1 - T_k^2$ ), получаем

$$R = \prod R_k = 1 - \sum T_k^2/2 = 1 - T^2/2 \quad (9)$$

Уравнение для амплитуды моды резонатора и амплитуд в элементе связи запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_0(t) &= i \sum T_k B_k^{in}(t) + R A_0(t - \tau_0) e^{i2\pi n_m L/\lambda - \alpha L/2} \\ B_k^{out}(t) &= R_k B_k^{in}(t) + i T_k A_0(t). \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\tau_0 = n_m L/c$  – время одного оборота бегущей волны в сфере, а  $L \simeq 2\pi a$  – примерно равна длине окружности сферы,  $\lambda$  – длина волны,  $n_m$  – показатель преломления резонатора,  $c$  – скорость света и  $\alpha$  – коэффициент затухания мощности в резонаторе, обусловленный потерями на рассеяние, поглощение и излучение в резонаторе.

В изложенном представлении микросфера эквивалентна кольцевому резонатору, образованному зеркалами с пропусканием  $T_k$ , заполненному поглощающей средой с коэффициентом ослабления  $\alpha$ , а в случае одномодовой связи, как это было справедливо отмечено в работе [8], резонатору Фабри-Перо длиной  $L/2$  с глухим задним зеркалом.

Если потери на один оборот малы, то вблизи резонансной частоты:  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ ,  $n_m L = m\lambda_0$ , где  $m$  – целое число, раскладывая в ряд  $A_0(t - \tau_0) = A_0(t) - \tau_0 dA_0/dt$  из (10) получим:

$$\frac{dA_0}{dt} + (\delta_c + \delta_0 + i\Delta\omega)A_0 = i \frac{T\Gamma}{\tau_0} B^{in}, \quad (11)$$

где

$$\delta_0 = \frac{\alpha c}{2n_m}; \quad \delta_c = \frac{1 - R}{R\tau_0} = \frac{T^2}{2\tau_0}. \quad (12)$$

Здесь введен коэффициент  $\Gamma \leq 1$ :

$$\Gamma = \frac{\mathbf{T}B^{in}}{TB^{in}}, \quad (13)$$

который описывает перекрытие мод, и показывает насколько хорошо возбуждающее поле соответствует моде резонатора.

Слагаемое  $\delta_0$  обусловлено собственной добротностью резонатора  $Q_0 = 2\pi n_m/\alpha\lambda$ , а  $\delta_c$  описывает нагружение, т.е. утечку энергии моды в моды элемента связи. Понятно, что связь с резонатором является взаимной – энергия не только поступает в моду резонатора из мод накачки, но и утекает в них. Именно балансом собственных потерь, коэффициента связи и нагружения описывается установившийся режим в резонаторе. Ниже все величины, связанные с элементом связи (coupler) будут обозначаться индексом ‘c’, а величины связанные со сферическим микрорезонатором – ‘m’.

Получившееся уравнение (11) является классическим уравнением для медленно меняющейся амплитуды осциллятора под действием гармонической внешней силы.



Как будет показано ниже, коэффициенты  $T_k$  могут быть вычислены как интегралы перекрытия поля микросферы с каждой из ортогональных мод элемента связи. Отличие от Фабри-Перо резонатора и кольцевого резонатора состоит в том, что в микросфере  $T_k$  не являются фиксированными параметрами, а сильно зависят от геометрии связи, и в частности, экспоненциально зависят от величины зазора между резонатором и элементом связи, и, таким образом, находятся в руках экспериментатора.

Как уже подчеркивалось в [2], именно управляемое соотношение между  $\delta_0$  и  $\delta_c$  определяет эффективность связи при заданной конфигурации, при этом это соотношение учитывает одновременно перекрытие мод, синхронизм и оптимальное нагружение, обеспечивающее обмен энергией между резонатором и элементом связи.

Стационарное решение (11) имеет типичный для теории колебаний вид:

$$A_0 = \frac{i2\delta_c B^{in}}{\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega} \frac{\Gamma}{T} = \frac{i\Gamma B^{in}}{\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega} \sqrt{\frac{2\delta_c}{\tau_0}} \quad (14)$$

Амплитуда поля в резонаторе будет максимальна при  $\delta_c = \delta_0$  (собственная добротность равна добротности связи, или полная "нагруженная" добротность в два раза меньше собственной). Выходная стационарная амплитуда при этом равна

$$\mathbf{B}^{out} = \mathbf{B}^{in} - B^{in} \frac{2\delta_c \Gamma}{\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega} \frac{\mathbf{T}}{T}, \quad (15)$$

и полная выходная интенсивность имеет Лоренцов профиль частотной зависимости:

$$|\mathbf{B}^{out}|^2 = |B^{in}|^2 \left[ 1 - \frac{4\delta_0 \delta_c \Gamma^2}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + (\Delta\omega)^2} \right], \quad (16)$$

Из выражения (15) можно легко видеть, что выходной сигнал может быть представлен как результат интерференции входных полей и полей, "переизлученных" из резонатора. Следует отметить, что распределение мод во втором слагаемом (пространственное распределение переизлучения из резонатора) не зависит от входного распределения.

Наиболее важным частным случаем (15) является режим идеального соответствия мод ( $\Gamma = 1$ ), получающийся при  $\mathbf{B}^{in}/B^{in} = \mathbf{T}/T$ , когда доля входной мощности, заводимая в резонатор – максимальна. (Одномодовый элемент связи всегда работает в режиме идеального соответствия.) В этом случае при  $\delta_c = \delta_0$ , выходная интенсивность обращается в ноль, т.е. вся мощность теряется внутри резонатора. Этот режим обычно называют режимом критической связи.

Иногда эффективность связи оценивают по глубине провала  $K$  на резонансной частоте в частотной передаточной характеристике. Из выражения (15) можно получить:

$$K = \frac{4Q_0 Q_c \Gamma^2}{(Q_0 + Q_c)^2} = \frac{4Q\Gamma^2}{Q_0 + Q_c}$$

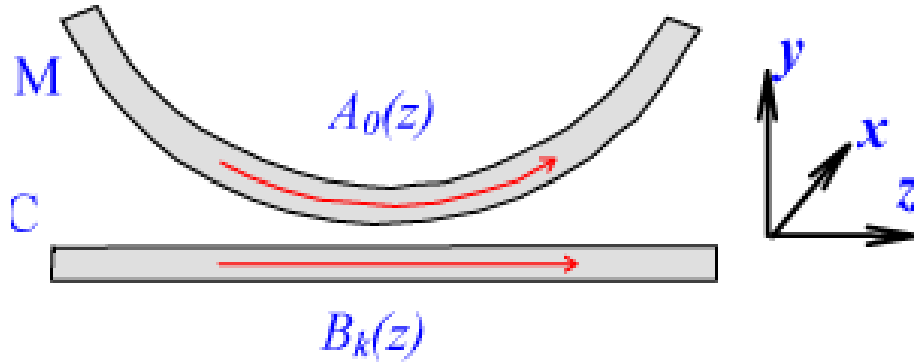


Рис. 15: Моделирование связи с микрорезонатором направляемым ответвителем

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\delta_0}{\omega} + \frac{2\delta_c}{\omega} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_c} \quad (17)$$

При критической связи  $K = 100\%$ . Однако критическая связь может наблюдаться и в случае неидеального соответствия до тех пор пока  $2\Gamma^2 > 1$  (частичное соответствие), если на выходе происходит фильтрация мод, с тем чтобы собрать только часть мод элемента связи. В этом случае утечку в остальные моды можно рассматривать как дополнительные внутренние потери и критическая связь достигается при более низкой нагруженной добротности  $Q$ , когда  $\delta_c = \delta_0 / (2\Gamma^2 - 1)$ . Если  $\delta_c \gg \delta_0$  (сильное нагружение), то при идеальном соответствии, хотя контраст провала на частотной характеристике получается мал (потери мощности в резонаторе малы), выходная волна имеет в резонансе противоположный знак по сравнению с волной вне резонанса, т.е. резонатор сдвигает фазу на  $\pi$ .

Здесь уместно отметить, что в резонаторах обычного типа, образованных зеркалами, добротность в основном определяется их резкостью, то есть добротностью связи, в то время как с микросферами ситуация противоположна, и ключевую роль обычно играет собственная добротность.

## 1.2 Моделирование связи волноводным ответвителем

Задача теперь состоит в том, чтобы определить параметры системы элемент связи – резонатор из электродинамики. В недавней статье Д.К.Роуланда и Дж.Д.Лава [13] (последний известен основательной книгой по теории оптических волноводов, написанной им в соавторстве с А.В.Снайдером [14]), проблема связи с модами типа шепчущей галереи рассматривается на основе модели распределенной связи между бегущей поверхностной цилиндрического резонатора и заданной моды планарного волновода.

В этом подходе вместо локальных коэффициентов передачи рассматривается распределенная связь, аналогично тому как анализируются распределенные волноводные ответвители. В наших обозначениях этот подход

ведет к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dz} &= i\Delta\beta_0(z)A_0 + iC_k(z)e^{i(\beta_k-\beta_0)z}B_k \\ \frac{dB_k}{dz} &= i\Delta\beta_k(z)B_k + iC_k(z)e^{-i(\beta_k-\beta_0)z}A_0,\end{aligned}\quad (18)$$

Коэффициенты  $\Delta\beta_0(z)$  и  $\Delta\beta_k(z)$  (описывающие возмущения волновых чисел  $\beta_0$  и  $\beta_k$  мод резонатора и элемента связи) и распределенные коэффициенты связи  $C_k$  могут быть вычислены в явном виде через интегралы перекрытия полей (см. [13] и ссылки в этой работе):

$$\begin{aligned}\Delta\beta_0 &= \frac{\omega(n_c^2 - 1)}{8\pi} \int_{\mathbf{C}} |\mathbf{e}_0|^2 ds; \\ \Delta\beta_k(z) &= \frac{\omega(n_m^2 - 1)}{8\pi} \int_{\mathbf{M}} |\mathbf{e}_k|^2 ds; \\ C_k^2 &= \frac{\omega^2}{64\pi^2} \int_{\mathbf{C}} (n_c^2 - 1) \mathbf{e}_k^* \mathbf{e}_0 ds \int_{\mathbf{M}} (n_m^2 - 1) \mathbf{e}_0^* \mathbf{e}_k ds\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{e}_k$  представляют эквивалентные направляемые волноводные моды, соответственно, в резонаторе и в элементе связи, нормированные на мощность. Интегрирование проводится по поперечному сечению мод. Индексы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{C}$  означают что интегрирование проводится внутри микрорезонатора или элемента связи. В принципе, сохранение энергии требует, чтобы оба интеграла в выражении для  $C_k^2$  были равны, и это часто просто постулируется. Однако, в общем приближении, которое мы здесь используем, это справедливо только для синхронизированных по фазе или идентичных волноводов. Это видно хотя бы из того, что в противоположном случае оба интеграла имеют разную зависимость от зазора. Тем не менее, для эффективной связи это равенство должно удовлетворяться.

Параметры (19) отличны от нуля лишь вблизи области связи. Может показаться, что передаточная матрица элемента связи и, соответственно, введенные ранее сосредоточенные коэффициенты  $T_k$  могут быть найдены из уравнений (18). Однако аналитические выражения выходных полей кроме нескольких простейших случаев не могут быть найдены из уравнений (18). Возможно именно поэтому авторы [13] предложили лишь численное решение для своего частного случая. Более того, в общем случае передаточная матрица является комплексной матрицей  $2 \times 2$  и не может быть описана единственным действительным параметром.

Ситуация к счастью более благоприятна для микросфер с высокой добротностью связи  $-Q_c = \omega/2\delta_c$ , когда  $T_k \ll 1$ . И действительно, из (12) следует, что  $T^2 \simeq 2\pi t/Q$ . Если взять резонаторы из плавленого кварца диаметром  $140\mu m$  ( $t \simeq 1000$ ) с сильным нагружением  $Q \sim 6 \times 10^7$  (в действительности добротность в таких резонаторах может быть порядка  $10^{10}$ )

то  $T \simeq 1\%$ . Практически  $T$  имеет порядок  $10^{-3}$ . Это означает, что амплитуда поля в резонаторе  $A_0$  при однократном прохождении через область связи меняется незначительно и поэтому может быть положена константой во втором уравнении (18), а также то, что стационарная амплитуда  $A_0 \gg B_k$ . Поэтому оказывается возможным получение приближенного решения:

$$\begin{aligned} A_0^{out} &= RA_0^{in} e^{i\Phi} + iT_k B_k^{in} \\ B_k^{out} &= B_k^{in} + iT_k A_0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$T_k = \int_{-\infty}^{\infty} C_k e^{i(\beta_0 - \beta_k)z} dz; \quad \Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\beta_0 dz \quad (21)$$

Выражения (20) практически идентичны (10) если добавить дополнительно условие замыкания поля в резонаторе. Во втором уравнении из (20) мы пренебрегли малыми членами второго порядка, хотя и сохранил их в первом, поскольку там они описывают сдвиг резонансной частоты, обусловленный присутствием элемента связи, а также эффект нагружения.

$$\begin{aligned} \omega_0 - \omega'_0 &= \frac{\Phi}{\tau_0} = \frac{\omega(n_c^2 - 1)}{8\pi\tau_0} \int_{\mathcal{C}} |\mathbf{e}_0|^2 dv \\ \delta_c &= \frac{T_k^2}{2\tau_0} = \frac{\omega^2(n_c^2 - 1)^2}{128\pi^2\tau_0} \left| \int_{\mathcal{C}} \mathbf{e}_k^* \mathbf{e}_0 e^{i(\beta_0 - \beta_k)} dv \right|^2 \end{aligned} \quad (22)$$

### 1.3 Вариационный подход

Подход, связанный с моделированием области связи распределенным ответителем может быть легко перенесен и на многомодовые элементы связи, однако выражения для параметров связи, лучше подходящие для элементов связи с плотным спектром мод, проще найти пользуясь более строгим и прямым способом – вариационным методом непосредственно из уравнений Максвелла.

Электрическое поле в резонаторе, возмущенном поднесением к нему элемента связи может быть выписано в следующем виде:

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \sum_j \hat{A}_j(t) \hat{\mathbf{e}}_j(\mathbf{r}), \quad (23)$$

где  $\hat{\mathbf{e}}_j$  – ортонормированные собственные моды невозмущенного резонатора, не имеющего собственных потерь.

$$\frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_m \hat{\mathbf{e}}_{j1} \hat{\mathbf{e}}_{j2}^* dv = \delta_{j1, j2} \quad (24)$$

( $\delta_{j1, j2}$  здесь символ Кронекера).

Строго говоря, такая нормализация имеет определенные сложности в случае открытых диэлектрических резонаторов с конечной излучательной добротностью  $Q_{rad}$  [15], однако в нашем рассмотрении мы можем легко избежать эти проблемы, считая интересующие нас собственные частоты  $\omega_j$  чисто действительными, пренебрегая чрезвычайно малыми мнимыми частями, описывающими потери на излучение и выбирая в качестве объема интегрирования сферу диаметром много меньшим чем  $Q_{rad}\lambda/\pi$ , но много большим чем диаметр микрорезонатора. Амплитуды  $\hat{A}_j$  являются медленно меняющимися во времени и отличаются от ранее введенных медленно меняющихся пространственных амплитуд  $A_j$  циркулирующих волн не только заменой переменной, но и нормировкой. Легко видеть, что

$$\frac{|\hat{\mathbf{e}}_j|^2}{|\mathbf{e}_j|^2} = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathbf{M}} [\hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{h}}_j^*] ds = \frac{1}{\tau_j}. \quad (25)$$

Уравнение для поля в сфере в присутствии элемента связи запишется в следующем виде:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_m + \left( \frac{\varepsilon_m(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{\varepsilon_c(\mathbf{r}) - 1}{c^2} + i \frac{2\delta_0 \varepsilon_m(\mathbf{r})}{\omega_0 c^2} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_m}{\partial t^2} = - \frac{\varepsilon_m(\mathbf{r}) - 1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_c}{\partial t^2}, \quad (26)$$

где второе слагаемое в скобках описывает дополнительную поляризацию из-за присутствия элемента связи, третий описывает затухание из-за внутренних потерь в резонаторе, а правая часть – наведенная поляризация задаваемая волной накачкой. Диэлектрические восприимчивости  $\varepsilon_{r|c}(\mathbf{r})$  равны  $n_{r|c}^2$  внутри и 1, соответственно, внутри и сферического резонатора и элемента связи. Подставляя (23) в (26) и затем умножая это уравнение на  $\hat{\mathbf{e}}_0^*$  после интегрирования по всему объему, пренебрегая малыми членами, получаем.

$$\frac{d\hat{A}_0}{dt} + \hat{A}_0(\delta_0 + i\Delta\omega') = \frac{i\omega(n_m^2 - 1)}{8\pi} e^{i\omega t} \int_{\mathbf{M}} \mathbf{E}_c \hat{\mathbf{e}}_0^* dv, \quad (27)$$

где  $\Delta\omega' = \omega'_0 - \omega$  и

$$\omega'_0 = \omega_0 - \frac{\omega}{8\pi} \int_{\mathbf{C}} (n_c^2 - 1) |\hat{\mathbf{e}}_0|^2 dv. \quad (28)$$

является новой резонансной частотой сдвинувшейся в присутствии элемента связи, в полном согласии с (22).

Поле в элементе связи запишем в виде разложения по модам, бегущим в направлении  $z$  (см. Рис. (14)):

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \int B_\beta(z, t) \mathbf{e}_\beta(\mathbf{r}) e^{i\beta z} d\beta, \quad (29)$$

Направляемые локализованные моды в элементе связи при этом подходе могут быть также легко учтены, если мы запишем  $B_\beta$  как

$$B_\beta = \sum_k B_k \delta(\beta - \beta_k) + \tilde{B}_\beta \quad (30)$$

Моды элемента связи нормируем так, чтобы

$$\frac{c}{4\pi} \int [\mathbf{e}_{\beta_1}, \mathbf{h}_{\beta_2}^*]_z ds = \delta(\beta_1 - \beta_2) \quad (31)$$

(здесь  $\delta(\beta_1 - \beta_2)$  – дельта функция и  $\mathbf{h}$  – амплитуда магнитного поля, соответствующей моды). Интегрирование производится по сечению перпендикулярному оси  $z$ . Амплитуды  $B_\beta$  (медленно меняющиеся по  $z$  и  $t$ ) описывают распределение волны накачки в элементе связи. Подставляя (29) в волновое уравнение:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_c + \left( \frac{\varepsilon_c(\mathbf{r})}{c^2} + \frac{\varepsilon_m(\mathbf{r}) - 1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_c}{\partial t^2} = - \frac{\varepsilon_c(\mathbf{r}) - 1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_m}{\partial t^2}, \quad (32)$$

получим

$$\begin{aligned} \int \left( \beta \frac{\partial B_\beta}{\partial z} - \frac{i\omega^2(\varepsilon_m - 1)}{2c^2} B_\beta \right) \mathbf{e}_\beta e^{i\beta z} d\beta \\ = \frac{i(\varepsilon_c - 1)\omega^2}{2c^2} \mathbf{E}_m e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (33)$$

Второй член в скобках (32) определяет изменение волнового числа (фазовой скорости) соответствующей моды в области взаимодействия. Домножив это уравнение векторно на  $\mathbf{h}_\beta^*$ , и проинтегрировав по поперечному сечению, получаем формальное решение для медленно меняющихся амплитуд:

$$\begin{aligned} B_\beta &= B_\beta^{in} e^{i\Delta\beta z} + \frac{i\omega^2}{8\pi c\beta} \int_{-\infty}^z e^{i\omega t - i\beta z' + i\Delta\beta(z-z')} \int_{\mathbf{C}} (n_c^2 - 1) [\mathbf{E}'_m, \mathbf{h}'_\beta^*]_z ds' dz' \\ \Delta\beta(z) &= \frac{\omega^2(n_m^2 - 1)}{8\pi c\beta} \int_{\mathbf{M}} [\mathbf{e}_\beta, \mathbf{h}_\beta^*]_z ds, \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (29) в (27) и используя (34) пренебрегая  $\Delta\beta$ , окончательно получаем следующее выражение для амплитуды поля в резонаторе:

$$\frac{d\hat{A}_0}{dt} + (\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega') \hat{A}_0 = \frac{i\omega(n_c^2 - 1)}{8\pi} \int B_\beta^{in} \int_{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_0 \mathbf{e}_\beta^* e^{-i\beta z} dv d\beta, \quad (35)$$

и

$$\begin{aligned} \delta_c &= \\ & \frac{\omega^3}{64\pi^2 c} \int_{\mathbf{M}} \int_{-\infty}^z \int_{\mathbf{C}} \frac{(n_m^2 - 1)(n_c^2 - 1)}{\beta} e^{i(\beta + \Delta\beta)(z-z')} [\hat{\mathbf{e}}'_0, \mathbf{h}'_\beta^*]_z (\mathbf{e}_\beta \hat{\mathbf{e}}_0^*) ds' dz' dv d\beta \\ & \simeq \frac{\omega^2(n_c^2 - 1)^2}{128\pi^2} \int_{\mathbf{C}} \left| \int \hat{\mathbf{e}}_0 \mathbf{e}_\beta^* e^{-i\beta z} dv \right|^2 d\beta, \end{aligned} \quad (36)$$

в естественном согласии с (22). Полное согласие с (11-15) станет очевидным, если положить

$$T_\beta = \frac{\omega(n_c^2 - 1)}{8\pi} \int_{\mathbf{C}} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\beta^* e^{i(\beta_0 - \beta)z} dv \quad (37)$$

Для высокочастотных мод  $\beta_0 \simeq m/a$ , и так как поле спадает вне резонатора приблизительно как  $e^{-\gamma r}$  ( $\gamma^2 \simeq k^2(n_m^2 - 1)$ ), зависимость  $\mathbf{e}_0$  от  $z$  может быть аппроксимировано следующим образом:  $\mathbf{e} \simeq \mathbf{e}(z=0)e^{-\gamma z^2/2a}$ . Если элемент связи является протяженным в направлении  $z$  (как большинство продемонстрированных до сих пор элементов связи), получаем:

$$T_\beta = \frac{\omega(n_c^2 - 1)}{8\pi} \sqrt{\frac{2\pi a}{\gamma}} \int_{\mathbf{C}} e^{-(\beta a - m)^2/2\gamma a} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\beta^* ds \quad (38)$$

## Список литературы

- [1] . . . В. Б. Брагинский, Доклады академии наук **293**, 1358 (1987).
- [2] С.П. Вятчанин, М.Л. Городецкий и В.С. Ильченко, Журнал прикладной спектроскопии. **56**, 274 (1992).
- [3] М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухоруков, *Теория волн*, М.: Наука, 1979.
- [4] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko, Opt. Comm. **113**, 133 (1994).
- [5] M. G. L. M. J. F. V.S. Ilchenko, D.S. Starodubov, Conference on Lasers and ElectroOptics, Baltimore, May 23-28, Technical Digest , 67 (1999).
- [6] J. F. B. K. S. J. D.S. Starodubov, V. Grubsky, Opt. Lett **22**, 1086 (1997).
- [7] S. A. A. Serpenguzel and G. Griffel, Opt. Lett. **20**, 654 (1994).
- [8] D. T. A. S. J. C. G. Griffel, S. Arnold and N. Morris, Opt. Lett. **21**, 695 (1995).
- [9] D. L. V. S. J. H. V. L.-S. J. M. R. N. Dubreuil, J. C. Knight and S. Haroche, Opt. Lett. **20**, 1515 (1995).
- [10] F. J. J. C. Knight, G. Cheung and T. A. Birks, Opt. Lett. **22**, 1129 (1997).
- [11] X. S. Y. V. S. Ilchenko and L. Maleki, Opt. Lett. **24**, 723 (1999).
- [12] S. M. I. V. V. Vassiliev and V. L. Velichansky, Appl. Phys. B **76**, 521 (2003).
- [13] D. R. Rowland and J. D. Love, IEE Proceedings, J. Optoelectronics **140**, 177 (1993).

- [14] А. Снайдер, Дж. Лав, *Теория оптических волноводов*, М.: Радио и связь, 1987.
- [15] H.M. Lai, P.T. Leung, K. Young, P.W. Barber, and S.C. Hill, Phys. Rev. A **41**, 5187 (1990).