

Спецкурс “Оптические микрорезонаторы”.
Лекция 11. Добротности реальных
оптических микрорезонаторов. Объемные
потери. Поверхностные потери. Расщепление
резонансов. Полные потери.

М.Л.Городецкий

26 сентября 2007 г.

0.1 Добротность оптических микрорезонаторов

Полная собственная добротность оптических микрорезонаторов определяется следующим соотношением:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\text{изл}}} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}} + \frac{1}{Q_{\text{пов}}} \quad (1)$$

Здесь

$$Q = \omega \frac{\text{энергия, запасенная в резонаторе}}{\text{мощность потерь}} \quad (2)$$

В установившемся режиме мощность потерь просто равна мощности, закачиваемой в резонатор.

$Q_{\text{изл}}$ – описывает излучательные потери, обусловленные внутренним отражением от выпуклой поверхности,

$Q_{\text{вн}}$ – описывает затухание поля внутри резонатора (рассеяние, поглощение),

$Q_{\text{пов}}$ – описывает потери на поверхности резонатора

0.1.1 Излучательные потери

Излучательные потери были рассмотрены нами ранее (см. Лекции 4 и 5) и было показано, что для реальных микрорезонаторов на основе мод шепчущей галереи диаметром больше примерно десяти микронметров излучательные потери пренебрежимо малы.

0.1.2 Внутренние потери

Оптические потери в материале оптических резонаторов обусловлены теми же причинами, что и в волоконных световодах, и здесь так же должны быть

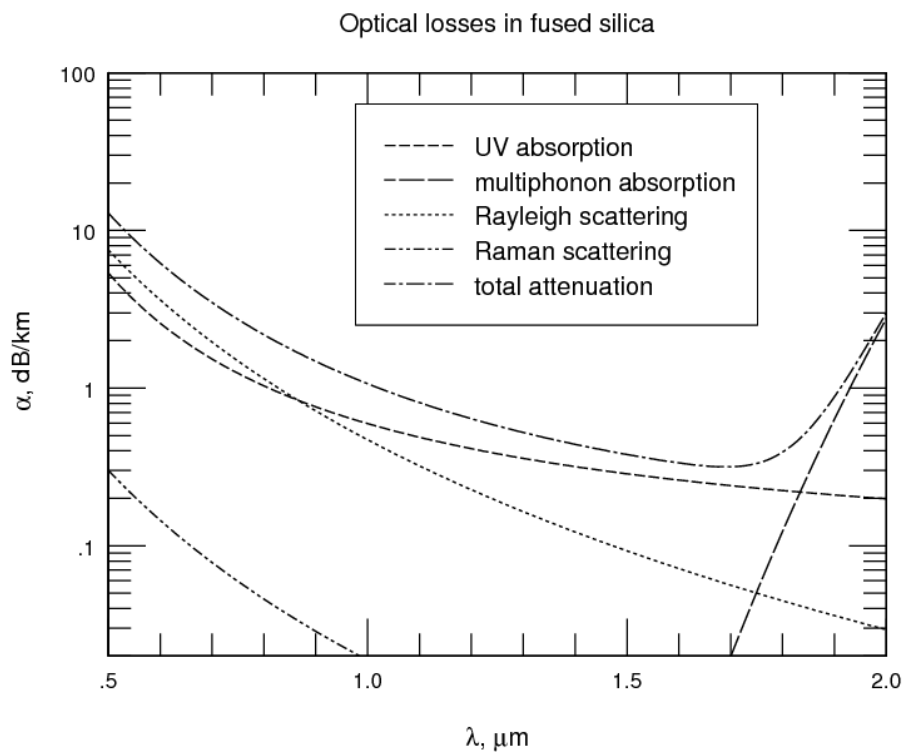


Рис. 1: Оптическое затухание в плавленом кварце

существенны два механизма затухания света: рассеяние и поглощение. Затухание в волокнах принято характеризовать величиной α , имеющей смысл относительных потерь мощности на единицу длины:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} \quad (3)$$

Формальная связь между постоянной затухания и добротностью определяется выражением:

$$Q_{\text{вн}} = \frac{2\pi n}{\alpha \lambda} \quad (4)$$

Зависимость затухания в плавленом кварце от длины волны показана на Рис 1.

Затухание α приводится обычно или в единицах обратной длины, или в децибеллах на длину:

$$\alpha[\text{дБ/м}] = 10 \lg(e) \alpha \simeq 4.343 \alpha [\text{м}^{-1}] \quad (5)$$

0.1.3 Поглощение

Поглощение обусловлено, главным образом, наличием примесей и дефектов в атомной структуре. Большие усилия по тщательной очистке и подбору материалов, предпринятые в последнее время, позволили снизить потери, вызванные примесным поглощением до малой, в сравнении с рассеянием величины, в широком диапазоне длин волн. Поглощение света происходит при взаимодействии фотонов с электронами и колебательными состояниями вещества. Для чистых материалов фундаментальное поглощение, обусловленное в длинноволновой области крылом колебательного спектра многофононного поглощения решетки, а в коротковолновой области крылом ультрафиолетового поглощения, описывается в оптическом диапазоне следующим выражением:

$$\alpha_{\text{погл}} \simeq \exp\left(-\frac{\hbar\omega - E_{g1}}{\Delta E_1}\right) + \exp\left(\frac{\hbar\omega - E_{g2}}{\Delta E_2}\right) \quad (6)$$

где $\hbar\omega$ – энергия фотона, E_g – эффективная энергия для данного материала и ΔE – другой характерный параметр зависящий от материала. Для плавленого кварца

$$\alpha_{\text{погл}} \simeq C_1 e^{-a_1/\lambda} + C_2 e^{a_2/\lambda}, \quad (7)$$

где $C_1 = 4 \times 10^{12}$ дБ/км, $a_1 = 56$ мкм [1], $C_2 = 0.066$ дБ/км, $a_2 = 2.2$ мкм [2]. Следует отметить что, хотя последняя работа 1973 года часто цитируется, данные приведенные в ней, являются устаревшими поскольку дают 0.27 дБ/км на 1.55 мкм, что больше экспериментально полученного значения 0.2 дБ/км.

1 Рассеяние Рэля в высокодобротных диэлектрических микрорезонаторах

Для большинства применений оптических микрорезонаторов с модами шепчущей галереи ключевым фактором является их очень высокая добротность, ограниченная в пределе потерями в материале. Другие механизмы, такие как срыв излучения с выпуклой поверхности, рассеяние на поверхностных остаточных неоднородностях и поглощение в слое поверхностного адсорбата (воды) зависят от размеров резонатора и таким образом могут быть преодолены. Как показали эксперименты, в микрорезонаторах из плавленого кварца в диапазоне видимого и ИК диапазона достижимы добротности $Q \simeq 8 \times 10^9$, что очень близко к пределу фундаментальных потерь в материале на этих длинах волн [3, 4]. Еще более высокие добротности можно ожидать вблизи минимума потерь в плавленом кварце на длине волны 1.55 мкм.

Во всех предшествующих оценках предела добротности предполагалось, что потери в микрорезонаторах могут быть адекватно моделированы тем же самым коэффициентом, которым описывают ослабление плоских волн в материале.

Связь между постоянной затухания и добротностью при этом определяется простым выражением:

$$Q_{\text{вн}} = \frac{2\pi n}{\alpha\lambda} \quad (8)$$

Однако, как показано ниже такой подход не вполне справедлив, поскольку из двух компонентов из которых складываются потери – поглощение и рассеяние, последняя составляющая внутри резонатора, основанного на эффекте полного внутреннего отражения должна модифицироваться. Рассеяние приводит не только к ограничению добротности резонатора, но и к связи между различными модами резонатора. При этом наиболее важной является появляющаяся связь между изначально вырожденными даже в неидеальном сфероиде бегущими модами, распространяющимися в противоположных направлениях. Это приводит к образованию дублетов мод и создает резонансное отражение в элемент связи. Указанный эффект впервые наблюдался и был качественно верно объяснен в работе [5]. Позднее он был подробнее описан в статье французской группы [6], в которой наряду с экспериментальными данными содержались и полукачественные оценки величины расщепления. Дублетная структура мод шепчущей галереи вследствие обратного рассеяния была идентифицирована и использована в [7] для получения резонансной оптической обратной связи и сужения линии генерации диодного лазера. Наименее разработанным остается анализ поверхностного рассеяния, что непосредственно следует из расхождения численных и аналитических оценок потерь поверхностного рассеяния в зависимости от размера резонатора и длины волны [8, 4, 9].

1.1 Рассеяние на термодинамических флуктуациях плотности и добротность микрорезонаторов

Вклад в потери рассеяния в однокомпонентном материале вносят рамановское (комбинационное) рассеяние света, рассеяние Мандельштама-Бриллюэна, возникающее в результате взаимодействия излучения с собственными колебаниями среды и рэлеевское рассеяние на термодинамических флуктуациях плотности. При этом расчеты показывают [10, 1], что из них рамановское рассеяние должно составлять лишь несколько процентов. Рэлеевское рассеяние при этом рассматривается, как рассеяние на большом числе слабокоррелированных диполей, образованных локальными флуктуациями плотности.

Для вычисления рассеяния [10, 11], объем материала разбивается на малые объемы, размеры которых произвольны, но намного меньше длины волны света. Каждый из них ведет себя как малый рассеивающий диполь, излучающий свет, в соответствии с формулой Рэля, интенсивности всех диполей будут складываться с учетом их фаз и, в результате, полная интенсивность рассеянного света будет для падающего поляризованного света

определяться выражением:

$$I_s = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta}{\lambda^4 r^2} \sum_i \sum_j (\epsilon_i - \epsilon^0)(\epsilon_j - \epsilon^0) \delta v_i \delta v_j I \quad (9)$$

Эта формула описывает также рассеяние в атмосфере, где сильная зависимость рассеяния от длины волны ($\propto \lambda^{-4}$) объясняет голубой цвет неба.

При выводе рассеяния в литературе обычно в выражениях типа (9) для угловой зависимости встречается вместо $\sin^2 \theta$, $(1 + \cos^2 \theta)/2$, что справедливо для рассеяния неполяризованного света. Впрочем, вид угловой зависимости не сказывается на окончательном результате для полного ослабления (полные интегралы по всем углам одинаковы).

Здесь ϵ^0 -средняя диэлектрическая проницаемость, так что $\epsilon_i = \epsilon^0 + \delta\epsilon_i$ диэлектрическая проницаемость каждого элемента объема. Это выражение можно проанализировать на основе функции корреляции и использовать его для учета некоторых видов рассеяния на неоднородностях внутри образца:

$$I_s = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta}{\lambda^4 r^2} dV \langle \int \delta\epsilon(\vec{r}) \delta\epsilon(0) dv \rangle I, \quad (10)$$

где $dV = sdz$ – рассеивающий объем. Вводя корреляционный объем δV_ϵ , выражение (10) можно переписать в виде:

$$\frac{I_s}{I} = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta}{\lambda^4 r^2} dV \langle \delta\epsilon^2 \rangle \delta V_\epsilon, \quad (11)$$

Рассмотрим теперь оптический луч, сечением s распространяющийся в среде, и проходящий через рассеивающий объем v толщины z , его мощность равна $P_0 = sI = IdV/dz$. Полная рассеиваемая мощность равна интегралу рассеиваемой интенсивности по поверхности большой сферы

$$P_s = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_s r^2 \sin \theta d\theta d\phi = I \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} dV \langle \delta\epsilon^2 \rangle \delta V_\epsilon. \quad (12)$$

С другой стороны, отношение рассеиваемой мощности, к полной мощности на длине dz должно, в соответствии с формулой (3), составлять α :

$$P_s = sI_s = -s \frac{dI}{dz} dz = \alpha I s dz = \alpha I dV. \quad (13)$$

Таким образом, мы получаем выражение для коэффициента рассеяния α

$$\alpha = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} \langle \delta\epsilon^2 \rangle \delta V_\epsilon \quad (14)$$

величину $\langle \delta\epsilon^2 \rangle \delta V_\epsilon$, используя уравнения термодинамики, можно выразить через параметры, которые поддаются измерениям [10]:

$$\langle \delta\epsilon^2 \rangle \delta V_\epsilon = \rho^2 \left(\frac{d\epsilon}{d\rho} \right)_T^2 \kappa T \beta_T. \quad (15)$$

где β_T – изотермический коэффициент сжимаемости, κ – постоянная Больцмана, T – температура, ρ – плотность диэлектрика, получим выражение

$$\alpha = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} \rho^2 \left(\frac{d\epsilon}{d\rho} \right)_T^2 \kappa T \beta_T \quad (16)$$

Существенно что это выражение одновременно учитывает как рассеяние Мандельштама-Бриллюэна так и рассеяние Рэлея. Характерной является зависимость потерь от четвертой степени длины волны. В выражении (16) при вычислении затухания для стеклообразных материалов необходимо подставлять температуру затвердевания материала, и соответствующий коэффициент сжимаемости (замороженные неоднородности).

Для вычисления зависимости $\epsilon(\rho)$ можно использовать различные модели: формулу Лоренц-Лоренца, Клаузиуса-Моссотти, Друда и др., однако универсального подхода, дающего согласующиеся с экспериментом значения рассеяния во всех спектральных диапазонах не существует.

Формулу (16) часто записывают в виде:

$$\alpha_{\text{расс}} = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} \epsilon^4 p^2 \kappa T \beta_T, \quad (17)$$

где

$$p = -\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{n^2} \right), \quad (18)$$

коэффициент фотоупругости (появление оптической анизотропии в материале под действием деформации) Поккельса, а $n = \sqrt{\epsilon}$ – показатель преломления среды. Для изотропных материалов, коэффициент p выражается через табличные измеримые компоненты:

$$p = (p_{11} + 2p_{12})/3 \quad (19)$$

В работе [10] также использована другая удобная запись

$$\alpha_{\text{расс}} = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} (\epsilon - 1)^2 (1 - \Lambda)^2 \kappa T \beta_T, \quad (20)$$

где Λ – определяет зависимость плотности от средней поляризуемости химических связей вещества. Для плавленого кварца [1] $\Lambda = 0.1$, температура стеклования $T_f = 1450\text{K}$ и соответствующая этой температуре величина $\beta_T = 7 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$.

Посмотрим теперь, как модифицируется вывод итогового выражения для затухания, обусловленного рассеянием в случае сферического микрорезонатора с модами типа шепчущей галереи. Неоднородности представляются в виде диполей, расположенных в зависимости от поляризации рассеиваемой волны либо параллельно для мод TE , либо перпендикулярно поверхности резонатора, для мод TH (Рис.2).

Угловое распределение интенсивности излучения диполя дается известной формулой электродинамики и пропорционально $\sin^2 \theta$, где в данном

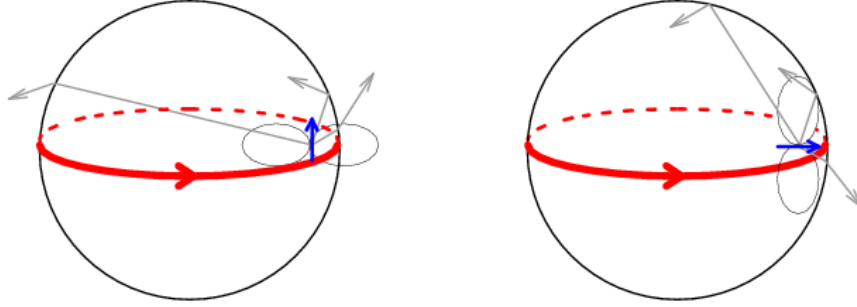


Рис. 2: Схема рассеяния энергии моды на неоднородностях для разных типов колебаний сферического микрорезонатора

случае θ – угол между осью диполя и направлением рассеяния. При выводе выражения для объемного рассеяния для того чтобы получить выражение для полного рассеяния из формулы (11) проводилось интегрирование по всем углам. В нашем случае, для того, чтобы получить более точную оценку для добротности, необходимо учитывать явление полного внутреннего отражения от внутренних стенок микрорезонатора. Рассеянные лучи падающие на поверхность под углом больше критического угла $\gamma_{кр} = \arcsin(1/n)$ либо опять включаются в моду если угол рассеяния мал и лежит внутри каустики моды, либо подавляются в результате деструктивной интерференции за несколько оборотов внутри резонатора (вторичным рассеянием, как эффектом второго порядка можно пренебречь). Таким образом, в потери включаются лишь те лучи, которые падают под углом меньшим критического. Коэффициентами прохождения Френеля мы здесь также можем пренебречь, поскольку для таких лучей, даже небольшой отбор энергии при однократном отражении становится большим при многократном отражении. Для того чтобы учесть эти факторы, необходимо при вычислении интенсивности рассеянной волны ограничить интегрирование по углам соответствующими пределами. Условия ограничения при этом будут выглядеть следующим образом: Для моды ТЕ, диполь расположен вдоль поверхности:

$$\sin^2 \gamma = \left(\frac{a-d}{a} \right)^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) < \frac{1}{n^2} \quad (21)$$

Для ТМ моды диполь расположен перпендикулярно поверхности:

$$\sin^2 \gamma = \left(\frac{a-d}{a} \right)^2 \sin^2 \theta < \frac{1}{n_m^2} \quad (22)$$

Квадрат $\sin^2 \gamma$ здесь поставлен для того, чтобы корректно учесть как рассеяние в верхнюю так и в нижнюю полусферы резонатора. d – расстояние диполя от поверхности резонатора, a – радиус резонатора. Если $d \ll a$, что всегда справедливо для высокодобротных мод шепчущей галереи, первый

множитель в выписанных выше условиях можно опустить, и тогда результат не будет зависеть от размера резонатора. Нетрудно видеть, что условия ограничения скажутся лишь на интегрировании по углам, и не влияют на последующий вывод формулы для коэффициента рассеяния. Поэтому можно ввести коэффициент подавления.

$$Q_{\text{расс}} = K_{TE, TM} \frac{2\pi n}{\alpha_{\text{расс}} \lambda} \quad (23)$$

При этом коэффициент $K_{TE, TM}$ равен отношению полной интенсивности рассеянной волны, к интенсивности волны с углами рассеяния, соответствующими углам падения на поверхность микрорезонатора, меньшим чем угол полного внутреннего отражения.

Результаты численного расчета для плавленого кварца, с $n = 1.45$ дают

$$K_{TE} = 2.8 \quad K_{TM} = 9.6 \quad (24)$$

Из приведенных значений следует, что моды ТМ менее чувствительны к потерям объемного рассеяния, однако, у этих мод большая доля энергии циркулирует вблизи поверхности резонатора и, поэтому они более чувствительны к поверхностным неоднородностям и загрязнениям, и (что обычно не существенно) имеют худшую излучательную добротность.

1.2 Рассеяние на поверхностных неоднородностях

В микрорезонаторе с модами шепчущей галереи электромагнитная энергия циркулирует вблизи поверхности. Естественно поэтому предположить, что свойства поверхности оказывают заметное влияние на свойства мод, в частности на их добротность. В частности остаточная шероховатость поверхности резонатора должна приводить к рассеянию и, следовательно, ухудшению добротности. Следует отметить, что в общем виде проблема рассеяния электромагнитных волн на шероховатой поверхности еще до конца не решена [12]

По аналогии с объемными потерями вычислим величину α , характеризующую поверхностные потери волны на единицу длины. Будем исходить из того же выражения (10), но теперь рассмотрим вклад только поверхностных неоднородностей. Как и в предыдущем параграфе, следует проинтегрировать это выражение по всем углам с учетом полного внутреннего отражения, но для поверхностных диполей следует также учесть, что излучение в пространство над поверхностью проходит беспрепятственно. И, таким образом, коэффициент подавления следует взять равным $2K_{TE, TM} / (K_{TE, TM} + 1)$. В расчетах коэффициента ослабления для общности мы его учитывать не будем, а введем лишь в окончательную формулу для добротности микрорезонатора.

Рассмотрим волну, распространяющуюся вблизи направляющей поверхности вдоль оси z , ось x выберем вдоль, а ось y перпендикулярно поверхности резонатора. Полная мощность волны равна $\int I_0(x, y) dx dy$. Неоднородность поверхности приводит к неоднородности показателя преломления (3):

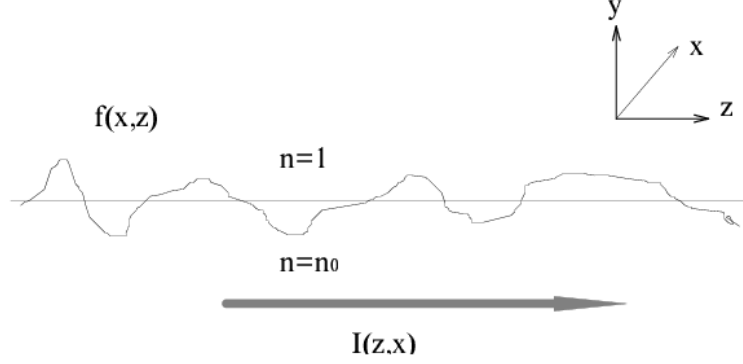


Рис. 3: Неоднородности оптической поверхности

$$\delta\epsilon(x, y, z) = (n_m^2 - 1)f(x, z)\delta(y), \quad (25)$$

Удобнее всего неоднородность границы характеризовать корреляционными функциями. Корреляционная функция простейшего вида, которую часто используют для оценок, имеет вид:

$$R(\rho) = \sigma^2 e^{(-|\rho|/B)} \quad (26)$$

Постоянная B определяет характерный размер островков неоднородностей и называется длиной корреляции, а дисперсия $\sigma^2 = \langle f^2(x, z) \rangle$ часто называется также шероховатостью поверхности. Спектральная функция такой экспоненциальной корреляционной функции соответствуют кривой Лоренца:

$$\Phi(\beta) = \frac{2\sigma^2 B}{1 + \beta^2 B^2} \quad (27)$$

В этой модели

$$P_s = dz \int I(x=0) dy \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} \sigma^2 (n^2 - 1)^2 \delta s_\epsilon \quad (28)$$

где характерная площадь корреляции поверхностных неоднородностей δs_ϵ определяется выражением:

$$\delta s_\epsilon = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} R(\rho) d\rho d\phi = 2\pi B^2 \quad (29)$$

Таким образом, учитывая что полная мощность равна $\int I(x, y) dx dy$, и считая, что волна распространяется близко от поверхности, получаем:

$$\alpha_{\text{пов}} = \frac{\int I(0) dx}{\int I(y) dx dy} \frac{16(n^2 - 1)^2 \pi^4 B^2 \sigma^2}{3\lambda^4}, \quad (30)$$

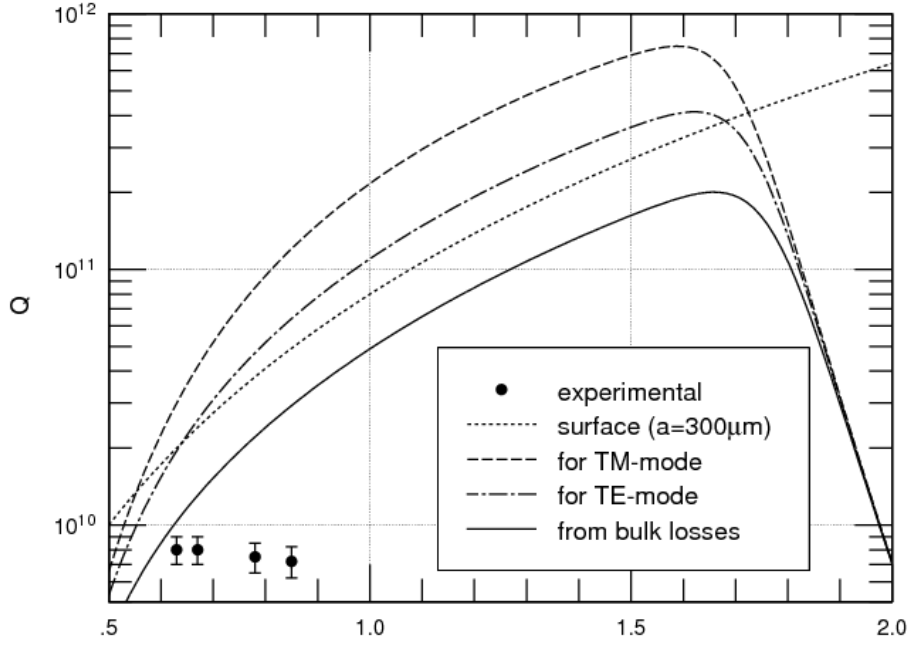


Рис. 4: Влияние различных видов потерь на добротность микрорезонаторов

Обратимся теперь к сферическому микрорезонатору. В лекции 5 было получено приближение, связывающее интеграл квадрата поля по объему резонатора и поле на поверхности, из которого следует, что:

$$\frac{\int I(y) dx dy}{\int I(0) dx} \simeq \frac{a}{2\Delta^2} \simeq \frac{a(n^2 - 1)}{2\kappa^2 n^2} \quad (31)$$

где $\kappa = (1/n)^2$ для колебаний ТМ и $\kappa = 1$ для ТЕ-мод.

Окончательно получаем выражение для добротности:

$$Q = \frac{2K_{TE}}{K_{TE} + 1} \frac{3\lambda^3 a}{16n_m \pi^3 B^2 \sigma^2 \kappa^2} \quad (32)$$

Это выражение отличается от того что было получено в [4], на основе модели замкнутого в кольцо волновода с неоднородной поверхностью ([12]). Причина состоит в том, что авторы недооценили величину объемного соотношения (31), считая, что оно пропорционально $\sqrt{a\lambda}$, а не a . В этой же работе [4] представлены результаты исследования поверхности резонатора из плавного кварца с помощью атомно-силового микроскопа, оценки неоднородностей дали значения $B = 5$ нм и $\sigma = 1.7$ нм.

На Рис.4, представлены предсказания пределов для добротности микросфер из плавного кварца с учетом модифицированных выражений для потерь рассеяния. Графики $Q(\lambda)$ включают литературные данные [2, 1] для

УФ и ИК потери поглощения в плавленом кварце. Согласно этим работам, объемные потери в плавленом кварце могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$\alpha \simeq (0.7\mu m^4/\lambda^4 + 1.1 \times 10^{-3} \exp(4.6\mu m/\lambda) + 4 \times 10^{12} \exp(-56\mu m/\lambda))dB/km \quad (33)$$

Для оценок поверхностного рассеяния, был выбран довольно большой радиус резонатора $a = 1mm$ (ограниченная этим видом потерь добротность линейно убывает с радиусом).

Таким образом, в видимом диапазоне, предсказанное подавление рассеяния в микросферах субмиллиметрового размера нивелируется поверхностным рассеянием, и в них трудно ожидать значения добротности большие чем $Q \simeq 8 \times 10^9$, экспериментально продемонстрированные в резонаторах диаметром $600 \div 800\mu m$. Однако для больших длин волн, можно ожидать достижение более высоких значений добротности чем предсказывалось ранее. Для очень больших резонаторов диаметром в несколько миллиметров (уже не микро, а минирезонаторов), могут быть достигнуты добротности существенно большие чем 10^{11} . Следует заметить, что даже достижение добротности $Q \simeq 10^{12}$ кажется возможным, поскольку рассеяние Рэлея может быть еще более уменьшено в плавленом кварце посредством длительного отжига (при этом в выражение для рассеяния (16) будет входить не высокая температура стеклования, а температура примерно равная температуре отжига). Так, сообщалось, что таким образом в волокнах удалось снизить потери рассеяния по крайней мере на 25% [13].

Для демонстрации предсказанной сверхдобротности в микросферах необходимо чтобы все остальные виды потерь, не связанные с фундаментальными механизмами, были существенно меньше. Один из таких механизмов – оптическое поглощение в хемосорбированном слое гидроксидов OH^- и воды. Как уже было указано, в видимом диапазоне на длине волны 633нм, в обычных лабораторных условиях, оседание около 1.5 монослоев за первые ~ 100 секунд с момента изготовления резонатора приводит к падению добротности от $Q \simeq 8 \times 10^9$ до $(2 \div 3) \times 10^9$ в сфере диаметром 600 мкм. Хотя все поверхностные потери линейно уменьшаются с ростом радиуса a (как рассеяние так и поглощение), но зависимость потерь в адсорбате от длины волны неизвестна. Известно, правда, что в объеме плавленого кварца ионы гидроксидов приводят к образованию колебательных пиков поглощения на длине волны $\lambda = 2.73$ мкм и обертонах на 1.37, 0.95, 0.725 и 0.586 мкм.

Необходимо подчеркнуть, что выражение для потерь поверхностного рассеяния в микросферах, рассчитанное на основе данных из статьи [4] и модели экспоненциальной корреляционной функции нельзя считать окончательным решением вопроса. Как показывают оценки, неоднородность поверхности может быть существенно меньше если только будет разработана соответствующая процедура обработки.

Остаточная шероховатость поверхности может быть связана лишь с наличием замороженных при стекловании поверхностных капиллярных волн.

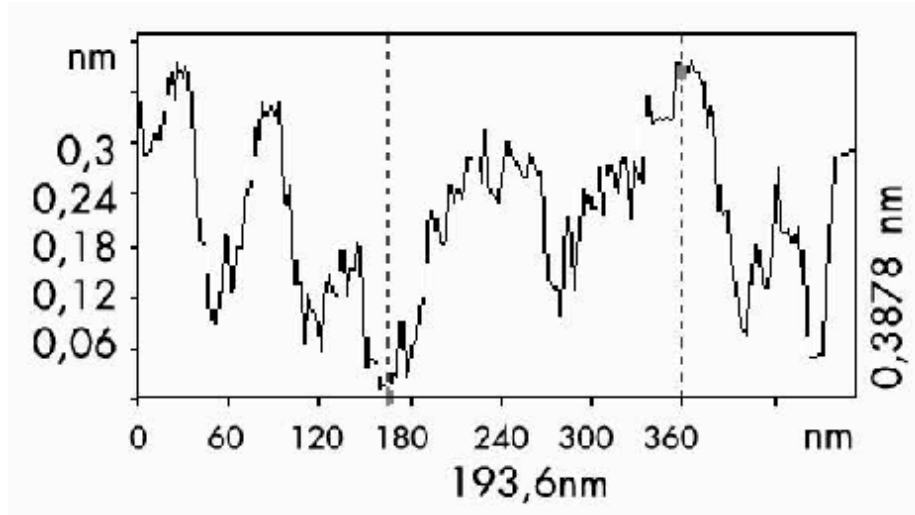


Рис. 5: Двухмерный профиль поверхности микросферы диаметром 2600 мкм

Эти волны приводят к флуктуациям:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{L,M} b_L Y_L^M(\theta, \phi), \quad (34)$$

где Y_L^M – угловая сферическая функция, и $L > 1$. Если, согласно принципам термодинамики, каждая мода колебаний имеет энергию κT , то [9]

$$\langle b_L^2 \rangle = \frac{\kappa T}{\tilde{\sigma}(L-1)(L+2)}, \quad (35)$$

где $\tilde{\sigma}$ – коэффициент поверхностного натяжения ~ 200 дин/см в плавленом кварце при температуре $T = 1500K$. Как показывают оценки, размер этих флуктуаций будет в несколько раз меньше чем те, что были измерены в [4]. Однако, уместно отметить, что функция корреляции вычисленная для капиллярных флуктуаций имеет логарифмический вид, и поэтому не может быть охарактеризована длиной корреляции. Нами были проведены самостоятельные измерения профиля поверхности с помощью атомно-силового микроскопа физического факультета. И, действительно, в ряде случаев шероховатость поверхности была в несколько раз меньше чем в [4] (см. Рис.5, Рис.6).

Таким образом, сохраняется надобность в разработке метода расчета поверхностного рассеяния на поверхностных капиллярных волнах в приложении к микросферам. (Формальная подстановка в выражение (??) разложения в ряд по сферическим гармоникам поверхностных волн приводит к неверному выражению с добротностью, падающей с ростом диаметра резонатора.)

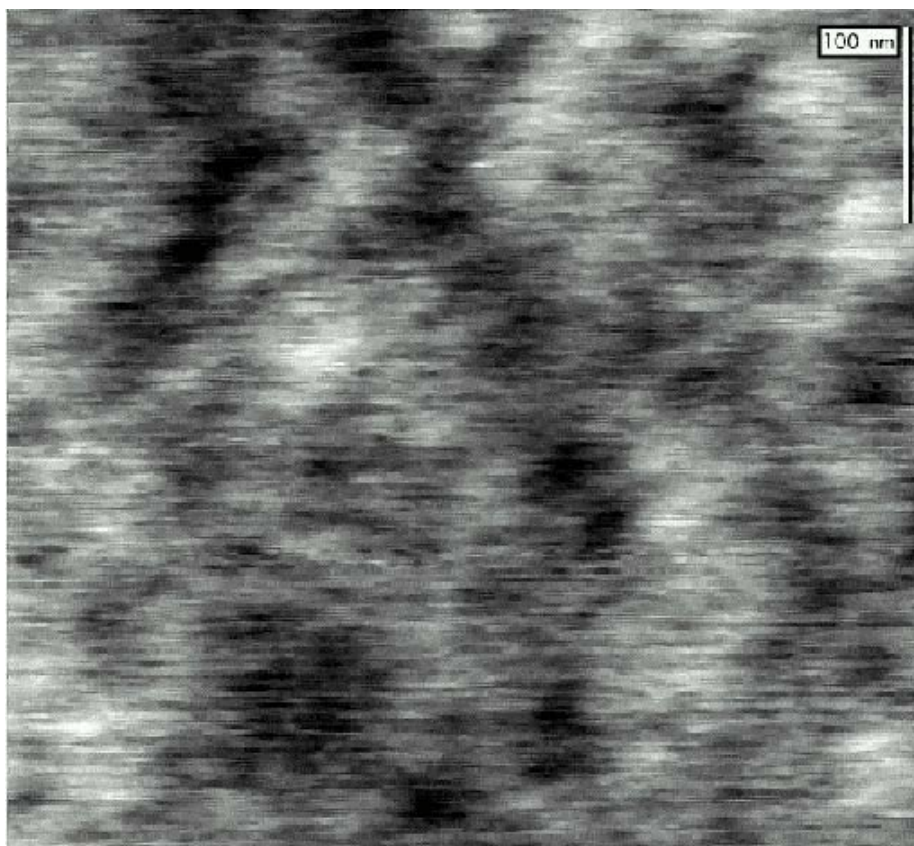


Рис. 6: Скан поверхности микросферы диаметром 2600 мкм в приэкваториальной области, уровни показаны оттенками серого цвета

1.3 Связь мод: общий подход

Связь, устанавливающаяся между различными модами микросферы, вследствие наличия объемных и поверхностных неоднородностей, можно описать в рамках вариационного подхода. Случайные отклонения диэлектрической проницаемости можно записать в виде:

$$\delta\epsilon = f(\theta, \phi)F(r), \quad (36)$$

где $F(r)$ – случайная радиальная, а $f(\theta, \phi)$ – случайная угловая функция. В частном случае малых поверхностных неоднородностей микросферы, флуктуации можно представить в следующем виде:

$$r(\theta, \phi) = a + f(\theta, \phi), \quad (37)$$

и выражение (36) тогда запишется как:

$$\delta\epsilon = (n^2 - 1)f(\theta, \phi)\delta(r - a). \quad (38)$$

Волновое уравнение для поля в микрорезонаторе с неоднородностями можно получить непосредственно из уравнений Максвелла:

$$\Delta E - \left(\frac{\epsilon^0(\vec{r})}{c^2} + \frac{\delta\epsilon(\vec{r})}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (39)$$

Решение невозмущенного волнового уравнения в резонаторе без неоднородностей (если $\delta\epsilon = 0$) имеет вид

$$\mathbf{E}_j \propto \hat{\mathbf{e}}_j(r, \theta, \phi)e^{-i\omega_j t}, \quad (40)$$

где $\hat{\mathbf{e}}_j(r, \theta, \phi)$ – векторная гармоника, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{e}}_j + \epsilon^0 k_j^2 \hat{\mathbf{e}}_j = 0. \quad (41)$$

Индекс j соответствует всем возможным типам колебаний, а $j = 0$ отвечает первоначально возбужденной моде. Используя метод медленно меняющихся амплитуд, находим решение в виде:

$$\mathbf{E} = \sum A_j(t) \hat{\mathbf{e}}_j e^{-i\omega_0 t} \quad (42)$$

Подставляя эту сумму в выражение (39), и, опуская малые члены, получим:

$$2i\omega_0 \epsilon^0 \sum \frac{dA_j(t)}{dt} \hat{\mathbf{e}}_j + \omega_0^2 \delta\epsilon \sum A_j(t) \hat{\mathbf{e}}_j + \epsilon^0 \sum_j (\omega_0^2 - \omega_j^2) A_j(t) \hat{\mathbf{e}}_j = 0 \quad (43)$$

Умножив это уравнение на $\hat{\mathbf{e}}_k^*$ и проинтегрировав его по всему объему с учетом ортогональности (тонкостями, связанными с неэрмиттовостью системы из-за наличия диссипации пренебрегаем), находим обычные уравнения связанных мод:

$$\frac{dA_k}{dt} + i\Delta\omega_k A_k = i \sum_j A_j \beta_{jk}, \quad (44)$$

где $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_0$ и

$$\beta_{jk} = \frac{\omega_0}{2\epsilon^0} \frac{\int \hat{\mathbf{e}}_j \delta\epsilon \hat{\mathbf{e}}_k^* dv}{\int |\hat{\mathbf{e}}_j|^2 dv} \quad (45)$$

Имеено случайные неоднородности $\delta\epsilon$ приводят в этом выражении к связи между $\hat{\mathbf{E}}_j$ и $\hat{\mathbf{E}}_k$. Нас интересует лишь модуль коэффициента β_{jk} , который определяет скорость обмена энергией между модами. Если размер неоднородностей и их длина корреляции малы по сравнению с длиной волны, β_{jk}^2 можно усреднить

$$\beta_{jk}^2 = \frac{\omega_0^2}{4\epsilon_0^2} \frac{\langle \int \delta\epsilon(\vec{r}) \delta\epsilon(0) dv \rangle}{V_{jk}}, \quad (46)$$

где V_{jk} – объем перекрытия мод:

$$V_{jk} = \frac{\int |\hat{\mathbf{e}}_j|^2 dv \int |\hat{\mathbf{e}}_k|^2 dv}{\int |\hat{\mathbf{e}}_j|^2 |\hat{\mathbf{e}}_k|^2 dv}. \quad (47)$$

В самом интересном случае связи между двумя циркулярными модами $A_+(t)$ и $A_-(t)$, бегущими в микрорезонаторе в противоположных направлениях, распределения полей различаются лишь фазовым множителем $\exp(\pm im\phi)$. В этом случае $\hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_k^*$ и V_{jk} превращается в эффективный объем локализации поля:

$$V_{eff} = \frac{(\int |\hat{\mathbf{e}}_j|^2 dv)^2}{\int |\hat{\mathbf{e}}_j|^4 dv}, \quad (48)$$

1.4 Связь мод: расщепление нормальных мод

Связь встречных мод приводит к наблюдаемому расщеплению вырожденных мод в том случае, если константа связи β существенно превышает потери внутри резонатора и в элементе связи $\delta_0 + \delta_c$. При этом

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2\beta}{\omega_0}, \quad (49)$$

Если неоднородности являются термодинамическими флуктуациями плотности, то получаем:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{is} = \sqrt{\frac{n^4 p^2 \kappa T \beta_T}{V_{eff}}} = \sqrt{\frac{3\lambda^4 \alpha_{is}}{8\pi^3 n^4 V_{eff}}}, \quad (50)$$

в согласии с качественными оценками в работах [14, 6]. Эффективный объем моды $TE_{\ell\ell 1}$ можно вычислить по формуле ([8]):

$$V_{eff} = 2.3n^{-7/6} a^{11/6} \lambda^{7/6}, \quad (51)$$

Таким образом, для моды $TE_{\ell\ell 1}$ в микросфере из плавленого кварца получаем:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{is} \simeq \frac{5 \times 10^{-7} \mu m^{3/2}}{\lambda^{11/12} a^{7/12}}, \quad (52)$$

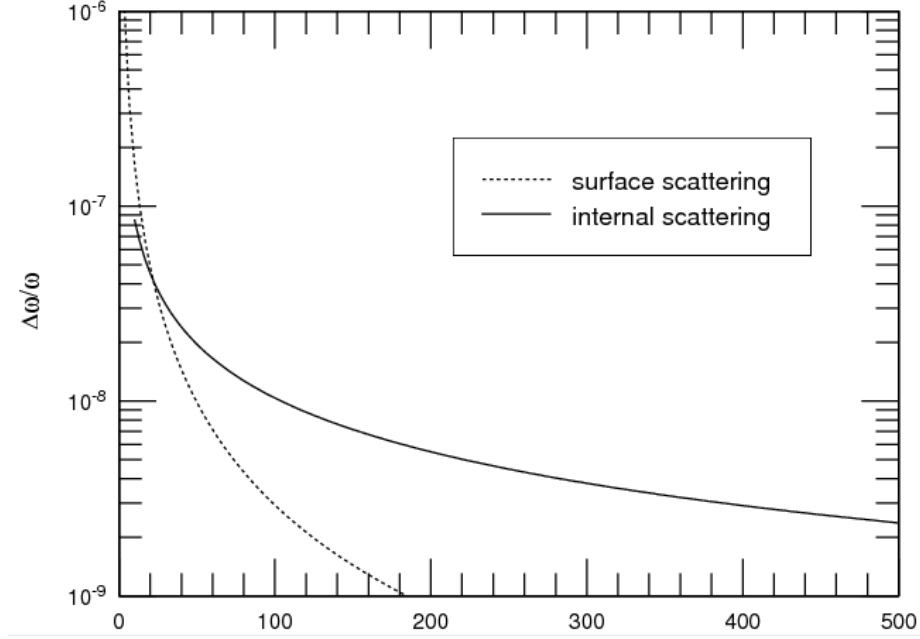


Рис. 7: Расщепление мод микрорезонаторов из-за рассеяния

Если $\ell \neq m$, справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$V_{eff,tm} = V_{eff,t\ell}(1 + 0.5\sqrt{\ell - m - 0.5}), \quad (53)$$

Рассмотрим теперь случай расщепления мод из-за связи на поверхностных неоднородностях. Из (45) и (25) после усреднения получаем:

$$\beta_{ss}^2 = \frac{\omega_0^2}{4n^4} \frac{\pi B^2 \sigma^2 |\vec{e}|^4}{V_{eff} \int |\vec{e}(r)|^4 dr} \quad (54)$$

или для моды $TE_{\ell\ell 1}$ в резонаторе из плавленого кварца:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{ss} \simeq \frac{1.1\sigma B}{\lambda^{1/4} a^{7/4}}, \quad (55)$$

Легко проверить, что при измеренной в работе [4] шероховатости поверхности полученное выражение дает существенно меньшее значение связи между модами по сравнению со случаем внутренних термодинамических флуктуаций (52). На (Рис.7) показаны результаты расчета расщепления мод для микрорезонатора из плавленого кварца на длине волны $\lambda = 0.63$ мкм.

Явное сравнение полученных теоретических предсказаний расщепления мод $\Delta\omega/\omega$ с экспериментальными результатами требует независимого измерения потерь объемного рассеяния в материале α_{is} образца из которого изготовлен конкретный резонатор, а также знания типа возбуждаемой моды

для вычисления величины эффективного объема V_{eff} . Все сообщавшиеся ранее экспериментальные данные, а также наши собственные наблюдения, к сожалению, пока не предоставляют такой возможности. Однако, численные оценки показывают, что экспериментальные результаты находятся в разумном – по порядку величины согласии с расчетом [5, 6, 7]. Так, для моды с самым малым объемом моды $TE_{\ell\ell 1}$ в резонаторе диаметром 150 мкм из плавленого кварца на длине волны 633 нм, формула (52) показывает расщепление 30 МГц по сравнению с 7 МГц, наблюдавшимися в нашем эксперименте [5]. Расхождение легко объясняется большим эффективным объемом, возбуждавшейся моды типа шепчущей галереи.

Таким образом, было проанализировано влияние объемного (рэлеевского) и поверхностного рассеяния на добротность и связь мод в высокодобротных оптических микрорезонаторах. Показано, что рэлеевское рассеяние должно заметно подавляться для мод типа шепчущей галереи по сравнению со случаем распространения волн в неограниченном пространстве. Это уменьшение потерь рассеяния происходит вследствие ограничений, накладываемых на углы рассеяния конфигурацией мод в резонаторе (другими словами, из-за дискретности спектра мод с высокой добротностью). Этот эффект имеет ту же природу, что и подавление спонтанного излучения атомов в отстроенном высокодобротном объемном резонаторе. В результате ранние оценки фундаментального предела добротности должны быть пересмотрены, и $Q \simeq 10^{12}$ может быть получено в ИК диапазоне в минирезонаторах существенно большего размера, порядка нескольких миллиметров (чтобы преодолеть ограничения поверхностного рассеяния и поглощения). Модифицированные выражения для ограничения добротности вследствие поверхностного рассеяния подтверждают линейное уменьшение потерь с радиусом [3, 4] и зависимость λ^3 .

1.5 Связь мод: обратное рассеяние и резонансное отражение в элемент связи

Чтобы проанализировать следствия появления в резонаторе связи между встречными бегущими модами, воспользуемся тем же самым квазигеометрическим приближением, которое было использовано при анализе элементов связи. Для простоты будем рассматривать лишь элемент связи с идеальным перекрытием мод (или одномодовый). Система уравнений для медленно меняющихся амплитуд полей резонатора и элемента связи выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_+}{dt} + (\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega)A_+ &= iA_-\beta + i\frac{T}{\tau_0}B_{in} \\
\frac{dA_-}{dt} + (\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega)A_- &= iA_+\beta \\
B_t &= \sqrt{1 - T^2}B_{in} + iTA_+ \\
B_r &= iTA_-,
\end{aligned} \tag{56}$$

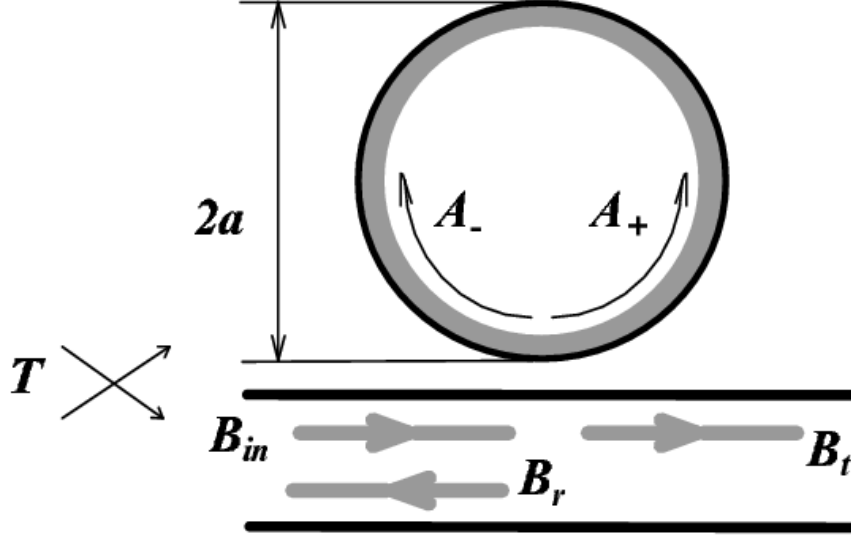


Рис. 8: Обратное рассеяние в микрорезонаторах и резонансное отражение в элемент связи

где $A_+(t)$ и $A_-(t)$, как и ранее амплитуды двух циркулярных встречных мод в резонаторе (Рис.8), моделирующих моды типа шепчущей галереи. B_{in} – амплитуда поля накачки, а B_t и B_r – выходные амплитуды прошедшей и отраженной волны в элементе связи. T – амплитудный коэффициент передачи, описывающий элемент связи, $\delta_0 = 2\pi n/\alpha\lambda$ – декремент собственных потерь, $\delta_c = T^2/2\tau_0$ декремент потерь на излучение в элемент связи, τ_0 – время одного оборота $\tau_0 \simeq 2\pi na/c$, и $\Delta\omega$ – отстройка от невозмущенной резонансной частоты ω_0 (подробнее см. предыдущую главу). Стационарное решение уравнения (56) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 A_+ &= \frac{i}{T} \frac{2\delta_c\beta}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + \beta^2 - \Delta\omega^2 + i2\Delta\omega(\delta_0 + \delta_c)} B_{in} \\
 A_- &= -\frac{1}{T} \frac{2\delta_c(\delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega)}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + \beta^2 - \Delta\omega^2 + i2\Delta\omega(\delta_0 + \delta_c)} B_{in} \\
 B_t &= \frac{\delta_0^2 - \delta_c^2 + \beta^2 - \Delta\omega^2 + i2\delta_0\Delta\omega}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + \beta^2 - \Delta\omega^2 + i2\Delta\omega(\delta_0 + \delta_c)} B_{in} \\
 B_r &= -\frac{i2\delta_c\beta}{(\delta_0 + \delta_c)^2 + \beta^2 - \Delta\omega^2 + i2\Delta\omega(\delta_0 + \delta_c)} B_{in} \quad (57)
 \end{aligned}$$

Если константа межмодовой связи меньше чем затухание $\beta < \delta_0 + \delta_c$, то выражение (57) имеет только один резонанс при $\Delta\omega = 0$, и обратное рассеяние мало. В этом случае ситуация не отличается от той, что была рассмотрена в предыдущей главе. На временном языке это означает,

что внутренняя связь просто не успевает образовать отраженную волну за время звона резонатора. Интересно, что режим критической связи (когда $B_t = 0$) при этом несколько сдвинут, и достигается не при $\delta_c = \delta_0$, а при $\delta_c^2 = \delta_0^2 + \beta^2$ и в этом случае в резонансе теряется не вся мощность, а часть ее уносится отраженной волной.

$$B_r = i \frac{\beta}{\delta_0 + \delta_c} \quad (58)$$

Случай $\beta \geq \delta_0 + \delta_c$ гораздо интереснее, и даже приводит к несколько неожиданному результату. В этом случае появляется два резонанса на частотах $\Delta\omega = \pm\sqrt{\beta^2 - (\delta_0 + \delta_c)^2}$ т.е. связь снимает вырождение между синусной и косинусной по углу ϕ модами микросферы, и времени звона достаточно, чтобы их образовать. Все интенсивности волн в резонансе при этом уже не зависят от β :

$$\begin{aligned} |A_+|^2 &= |A_-|^2 = \frac{1}{T^2} \frac{\delta_c^2}{(\delta_0 + \delta_c)^2} B_{in}^2 \\ |B_t|^2 &= \frac{\delta_0^2}{(\delta_c + \delta_0)^2} B_{in} \quad |B_r|^2 = \frac{\delta_c^2}{(\delta_c + \delta_0)^2} B_{in} \end{aligned} \quad (59)$$

Интересно (и это не является интуитивно очевидным), что если $\delta_0 \ll \delta_c$ (закритическая связь), но $\delta_0 + \delta_c < \beta$, основная часть входной мощности переизлучается назад, а интенсивность прошедшей волны стремится к нулю. Все эти режимы ясно видны на Рис.9. Эта особенность может быть важной для будущих применений микрорезонаторов для стабилизации лазеров [15, 7]. Для экспериментальной проверки этого режима требуются дополнительные экспериментальные исследования. В наших предварительных экспериментах мы многократно наблюдали, что резонансное обратное отражение отсутствовало, когда не было расщепления мод и появлялось при проявлении дублетов, а также то, что мощность обратной волны слабо зависела от нагружения пока дублеты ясно видны. Аналогичные наблюдения сообщаются и в работе [6].

1.5.1 Потери обусловленные наличием адсорбированной воды на поверхности микрорезонатора

Как было показано в [3] другим фактором влияющим на добротность микрорезонатора является адсорбция на поверхность атмосферной воды. Согласно современной модели двухступенчатой хемосорбции, после быстрого поглощения кислорода на только-что образованную поверхность SiO_2 оседает вода, находящаяся в атмосфере. Это приводит к образованию слоя групп OH на поверхности, продолжительность этого процесса имеет порядок 100 секунд. Получающаяся гидратированная поверхность является основой для последующего поглощения молекул воды. После этой второй стадии процесса, оканчивающегося приблизительно через 20-30 минут водяная пленка на поверхности приходит в состояние термодинамического

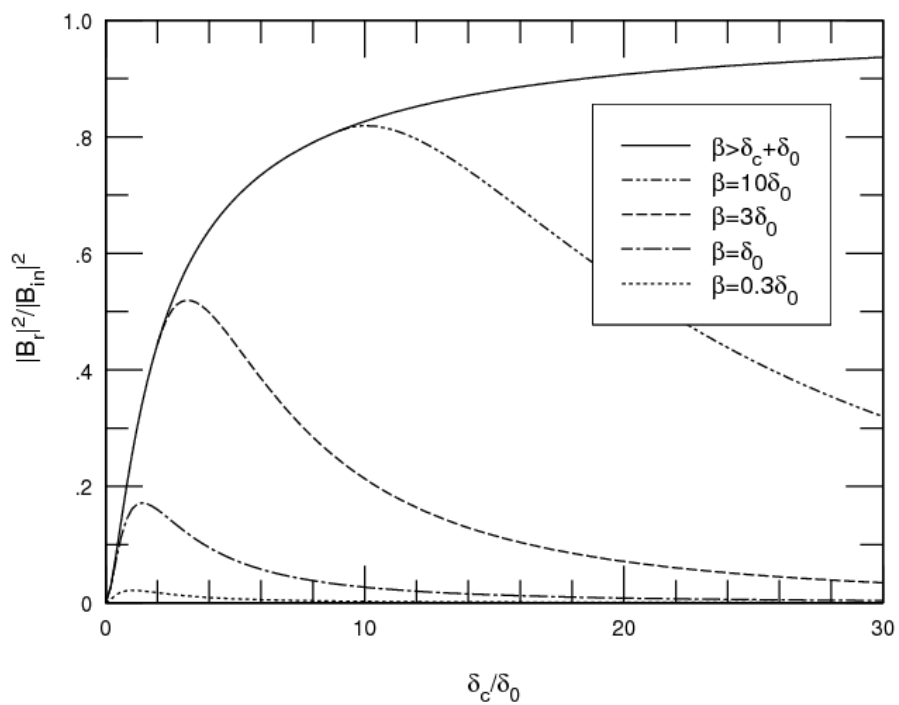


Рис. 9: Расчет нормированного резонансного отражения в согласованный элемент связи вследствие обратного рассеяния в микрорезонаторе в зависимости от относительной силы связи

равновесия. Результаты измерения расстройки частоты мод шепчущей галереи позволяют оценить толщину δ абсорбируемого слоя:

$$\delta = \frac{\Delta\nu}{\nu} \frac{n_{abs}^2 - 1}{n_{sil}^2 - 1} \frac{D}{2} \simeq \frac{\Delta\nu[\text{МГц}]}{800} [\text{нм}] \quad (60)$$

где $\Delta\nu$ – отклонение частоты, $\nu \simeq 475\text{ГГц}$ – оптическая частота, n_{abs} и n_{sil} – коэффициенты преломления абсорбированного слоя и кварца соответственно, а $D = 750\text{мкм}$. Согласно полученным в [3] данным общее изменение толщины абсорбирующего слоя между 1 и 30 минутами составляет $\sim 0.2\text{нм}$ и соответствует 1.5 монослоям. При этом добротность микрорезонаторов диаметром около $300\mu\text{m}$ падает почти на порядок с 8×10^9 до 10^9 и далее эта величина может сохраняться в чистой среде неограниченно долго. Таким образом, на сегодняшний день, потеря в адсорбированном слое, являются главным фактором, лимитирующим добротность. Влияние поверхностного поглощения можно оценить по формуле

$$Q = K \frac{2\pi n_a}{\alpha_a \lambda} \quad (61)$$

где K соответствует доле энергии циркулирующей в адсорбированном слое, для $TE_{\ell\ell 1}$ моды:

$$k = \frac{\int_0^R n^2 \bar{e}^2(r) dr}{n_a^2 \bar{e}^2(R) \delta} \simeq \frac{(n^2 - 1)R}{2\delta n_a^2} \simeq 0.1 \frac{R}{\delta_a} \quad (62)$$

где n_a – коэффициент преломления адсорбата (для воды $n_a = 1.333$ при $\lambda = 630\text{нм}$), δ_a – толщина адсорбированного слоя.

Список литературы

- [1] M.E.Lines, J. of Appl. Phys. **55**, 4058 (1984).
- [2] F. O. J. D.A. Pinnow, T.C. Rich and J. M. DiDomenico, **22**, 527 (1973).
- [3] A. A. S. M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko, Opt. Lett. **21**, 453 (1996).
- [4] H. M. E. W. S. D. W. Vernooy, V. S. Ilchenko and H. J. Kimble, Opt. Lett. **23**, 247 (1998).
- [5] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko, Laser Phys. **2**, 1004 (1992).
- [6] J. H. V. L.-S. J.-M. R. D. S. Weiss, V. Sandoghbar and S. Haroche, Opt. Lett. **20**, 1835 (1995).
- [7] V. S. I.-M. L. G. L. H. V. V. Vassiliev, V. L. Velichansky and A. V. Yarovitsky, Opt. Comm. **158**, 305 (1998).

- [8] M. L. G. V. B. Braginsky and V. S. Ilchenko, Phys. Lett. A **137**, 393 (1989).
- [9] . В.В.Дацюк, И.А.Измайлов, Квантовая электроника **38**, 56 (1990).
- [10] M.E.Lines, J. of Appl. Phys. **55**, 4052 (1984).
- [11] И.Л.Фабелинский, *Молекулярное рассеяние света*, М.: Наука, 1965.
- [12] X.-Г.Унгер, *Планарные и волоконные оптические волноводы*, М.: Мир, 1980.
- [13] S. S.Sakaguchi, **37**, 7708 (1998).
- [14] M. B. J.-M. R. L. Collot, V. Lefevre-Seguin and S. Haroshe, Europhys. Lett. **23**, 327 (1993).
- [15] . . . В.В.Васильев, В.Л.Величанский, Квантовая электроника **23**, 675 (1996).