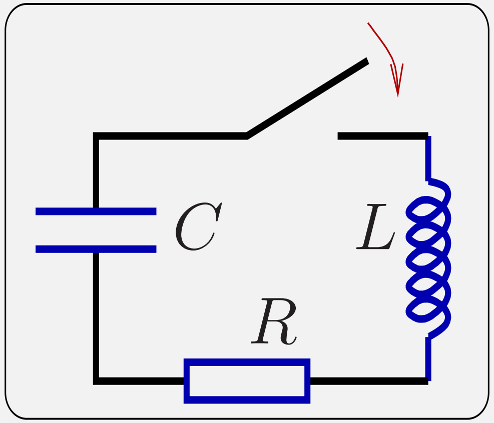
Внешнее воздействие на линейную систему

Последовательный контур. Свободные колебания



$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{rI}_{U_r} + \underbrace{\int_{-\infty}^{t} \frac{I(\tau)}{C}\, d\tau}_{U_C} = 0,$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

$$2\delta = \frac{r}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad q = Ae^{i\omega t},$$

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\delta\, i\omega\, Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = 0,$$

$$\left(-\omega^2 + 2\delta\, i\omega + \omega_0^2\right) Ae^{i\omega t} = 0,$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 - 2\delta\, i\omega - \omega_0^2 = 0,$$

$$\omega_{1,2} = i\delta \pm \tilde{\omega}_0, \quad \tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Решение однородного уравнения ищем в виде:

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t}$$

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t},$$

$$\dot{q}(t) = A_1\big(-\delta + i\tilde{\omega}_0\big)\, e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2\big(-\delta - i\tilde{\omega}_0\big) e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t}$$

Пусть заданы начальные условия

$$q(0) = CU_0, \qquad \Rightarrow\; A_1 + A_2 = CU_0,$$

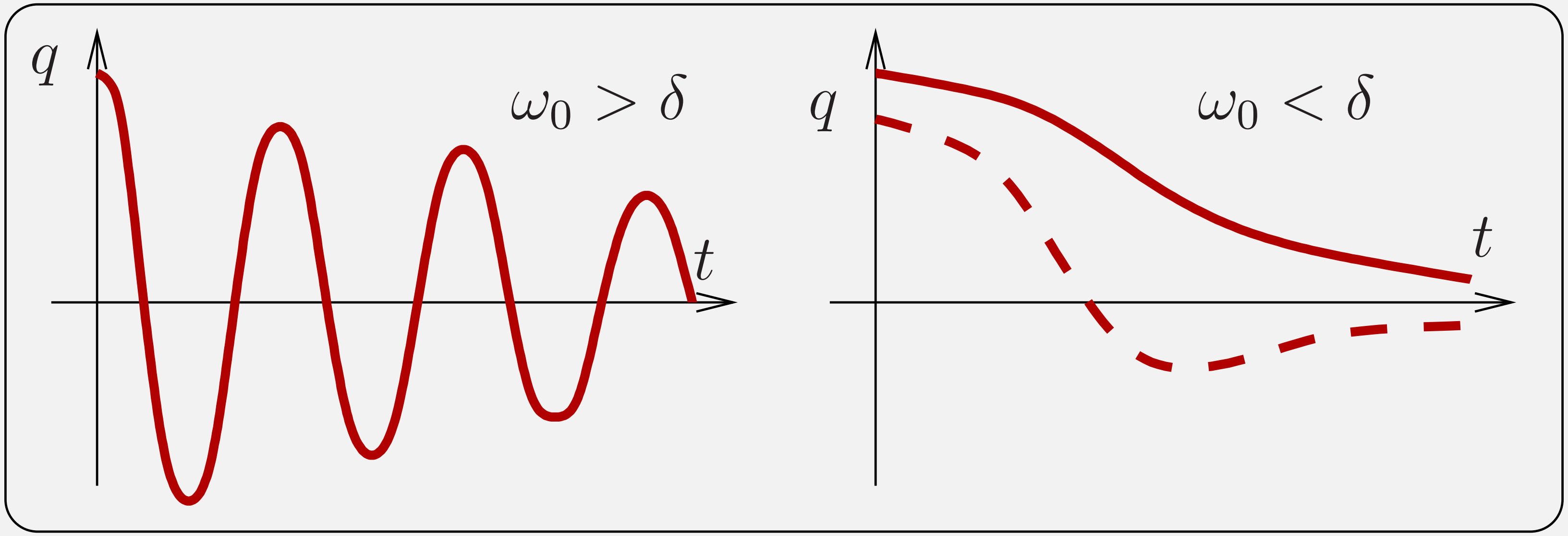
$$\dot{q}(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 - A_2 = \frac{\delta\, CU_0}{i\tilde{\omega}_0}.$$

$$q(t) = \mathbf{CU_0 e^{-\delta t}} \left(\cos\tilde{\omega}_\mathbf{0}\mathbf{t} + \frac{\delta}{\tilde{\omega}_\mathbf{0}}\,\sin\tilde{\omega}_\mathbf{0}\mathbf{t}\right)$$

Имеем два случая

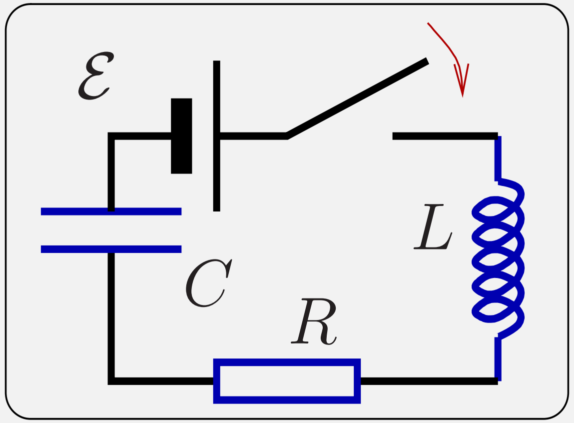
$$q(t) = \mathbf{CU_0e^{-\delta t}}\left(\cos\tilde{\omega}_\mathbf{0}\mathbf{t} + \frac{\delta}{\tilde{\omega}_\mathbf{0}}\,\sin\tilde{\omega}_\mathbf{0}\mathbf{t}\right), \quad \delta < \omega_\mathbf{0},$$

$$q(t) = \frac{\mathbf{CU_0e^{-\delta t}}}{|\tilde{\omega}_\mathbf{0}|}\left(\big(|\tilde{\omega}_\mathbf{0}| - \delta\big)\mathbf{e}^{-|\tilde{\omega}_\mathbf{0}|\mathbf{t}} + \big(|\tilde{\omega}_\mathbf{0}| + \delta\big)\mathbf{e}^{|\tilde{\omega}_\mathbf{0}|\mathbf{t}}\right), \quad \delta > \omega_\mathbf{0}$$



Последовательный контур. Переходная характеристика

При $t = 0$ включаем постоянную э.д.с. $\mathcal{E}$ (ступенька):



$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L},$$

$$q(0) = 0, \quad \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Пусть $\omega_0 \gg \delta$, $\mathcal{E}$ — постоянна.

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + C\mathcal{E},$$

$$q(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + A_2 = -C\mathcal{E},$$

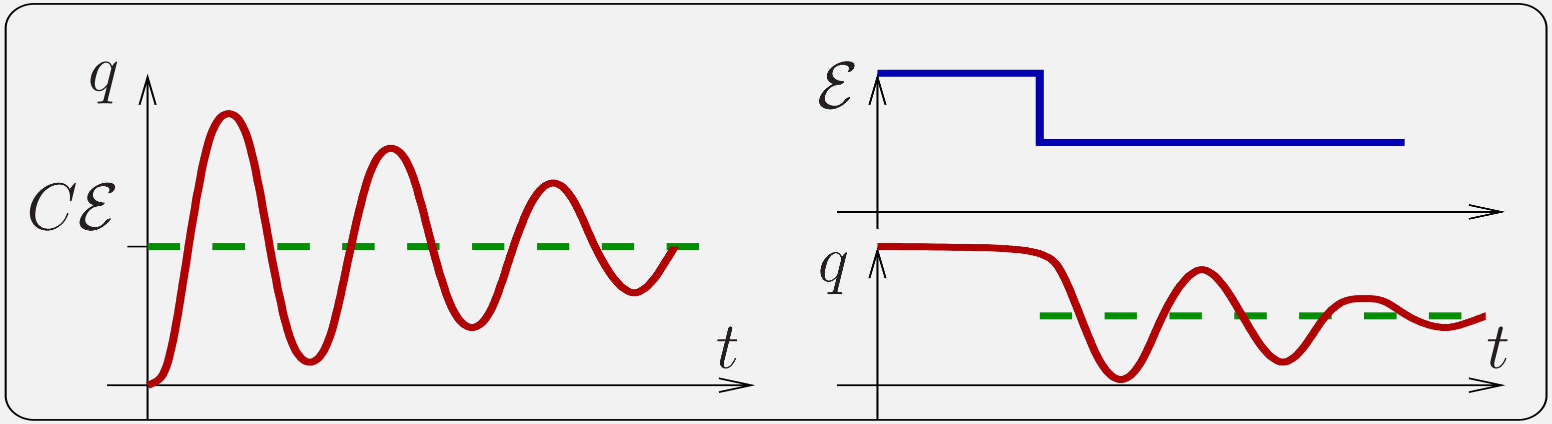
$$\dot{q}(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_2 - A_1 = \frac{\delta\, C\mathcal{E}}{i\bar{\omega}_0}$$

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar\omega_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar\omega_0 t} + C\mathcal{E}$$

$$q(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + A_2 = -C\mathcal{E}, \qquad \dot q(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_2 - A_1 = \frac{\delta\, C\mathcal{E}}{i\bar\omega_0},$$

$$q(t) = C\mathcal{E} - C\mathcal{E}e^{-\delta t}\left(\cos\bar\omega_0 t + \frac{\delta}{\bar\omega_0}\sin\bar\omega_0 t\right), \qquad \bar\omega_0^2 = \omega_0^2 - \delta^2,$$

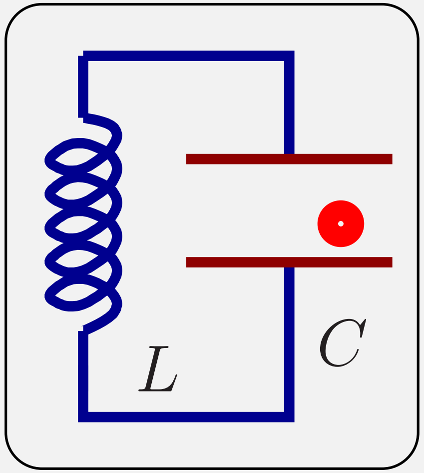
$$h(t) \equiv \frac{q(t)}{C\mathcal{E}} = 1 - e^{-\delta t}\left(\cos\bar\omega_0 t + \frac{\delta}{\bar\omega_0}\sin\bar\omega_0 t\right)$$



№1 "Электрон" Дано: L, C, d, m, e

1). Найти, чему равен сдвиг собственной частоты контура, если в емкость "вложен" свободный электрон.

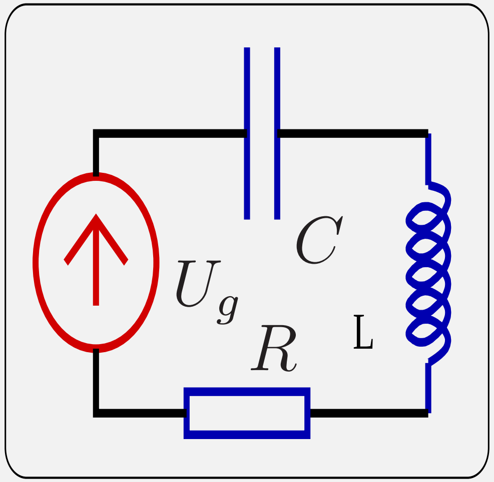
2). То же самое, если электрон "на пружинке"(частота его свободных колебаний равна ω_e).



№2 "Резонансная кривая" С какой максимальной скоростью $\frac{d\omega_g}{dt}$ можно менять частоту генератора ω_g, чтобы "прописать" (измерить) резонанстую кривую резонатора с заданной точностью, например, с относительной ошибкой $\epsilon = 0.03$. Параметры резонатора считать известными.

Последовательный контур. Вынужденные колебания

Установившийся режим: $\mathbf{t \gg 1/\delta}$.



$$A\cos(\omega t+\phi)=\Re\left[\mathcal{A}e^{i\omega t}\right]$$

$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L}+\underbrace{rI}_{U_r}+\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\frac{I(\tau)}{C}\,d\tau}_{U_C}=U_g(t)$$

$$U_g(t)=\mathcal{U}_g e^{i\omega t},\qquad I_L=I_r=I_C=\mathcal{I}e^{i\omega t}.$$

$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{rI}_{U_r} + \underbrace{\int_{-\infty}^{t} \frac{I(\tau)}{C}\,d\tau}_{U_C} = U_g(t),$$

$$U_C = \frac{1}{C}\int I_C dt = \frac{1}{i\omega C}\,\mathcal{I}e^{i\omega t},$$

$$U_r = r\,\mathcal{I}e^{i\omega t},$$

$$U_L = \frac{dI_L}{dt} = i\omega L\,\mathcal{I}e^{i\omega t}.$$

Реактивное сопротивление (импеданс):

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_L = i\omega L,$$

$$U(t) = U_C + U_r + U_C, \quad \mathcal{U}_g = \mathcal{I} Z(\omega),$$

$$Z(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega C} + r + i\omega L\right) = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(r\sqrt{\frac{C}{L}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right) =$$

$$= \rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right).$$

ρ – характеристическое сопротивление, Q – добротность,

ξ – расстройка.

Характеристики контура (резонатора):

ρ – характеристическое сопротивление,

Q – добротность, ξ – расстройка.

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(r\sqrt{\frac{C}{L}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right) = \rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right),$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\omega_0}{2\delta}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{\mathcal{U}_g}{\rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right)}, \quad U_R = R\mathcal{I}, \quad U_L = i\omega L\,\mathcal{I}, \quad U_C = \frac{\mathcal{I}}{i\omega C}$$

$$|\mathcal{I}(\omega)| = \frac{\mathcal{U}_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_I = \arg(\mathcal{I}(\omega)) = \operatorname{arctg}\left(-Q\,\xi\right),$$

$$|U_R(\omega)| = \frac{R\mathcal{U}_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_{U_R} = \varphi_I,$$

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\omega)| = \frac{\omega L\mathcal{U}_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_{U_L} = \varphi_I + \frac{\pi}{2},$$

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(\omega)| = \frac{\mathcal{U}_g}{\rho\omega C\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_{U_C} = \varphi_I - \frac{\pi}{2},$$

Последовательный контур. Резонанс:

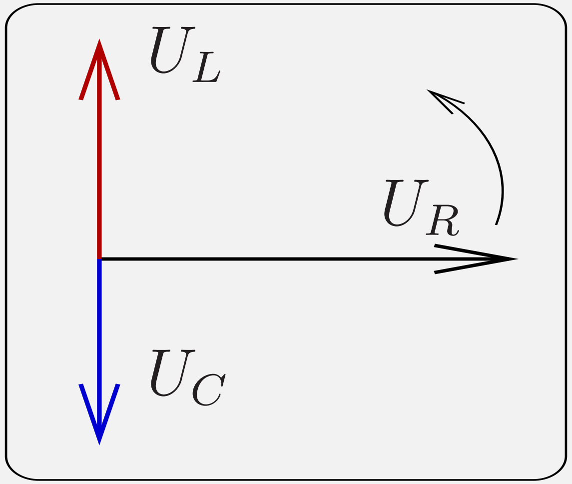
$$\xi \;=\; 0, \quad \omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(\omega)_{max} = \frac{\mathcal{U}_g}{r},$$

$$\mathbf{U_L} \;=\; i\omega_0 L\,\frac{\mathcal{U}_g}{r}\,e^{i\omega t} = \frac{i}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathcal{U}_g e^{i\omega t} = \mathbf{iQ}\,\mathcal{U}_\mathbf{g}\mathbf{e}^{\mathbf{i\omega t}},$$

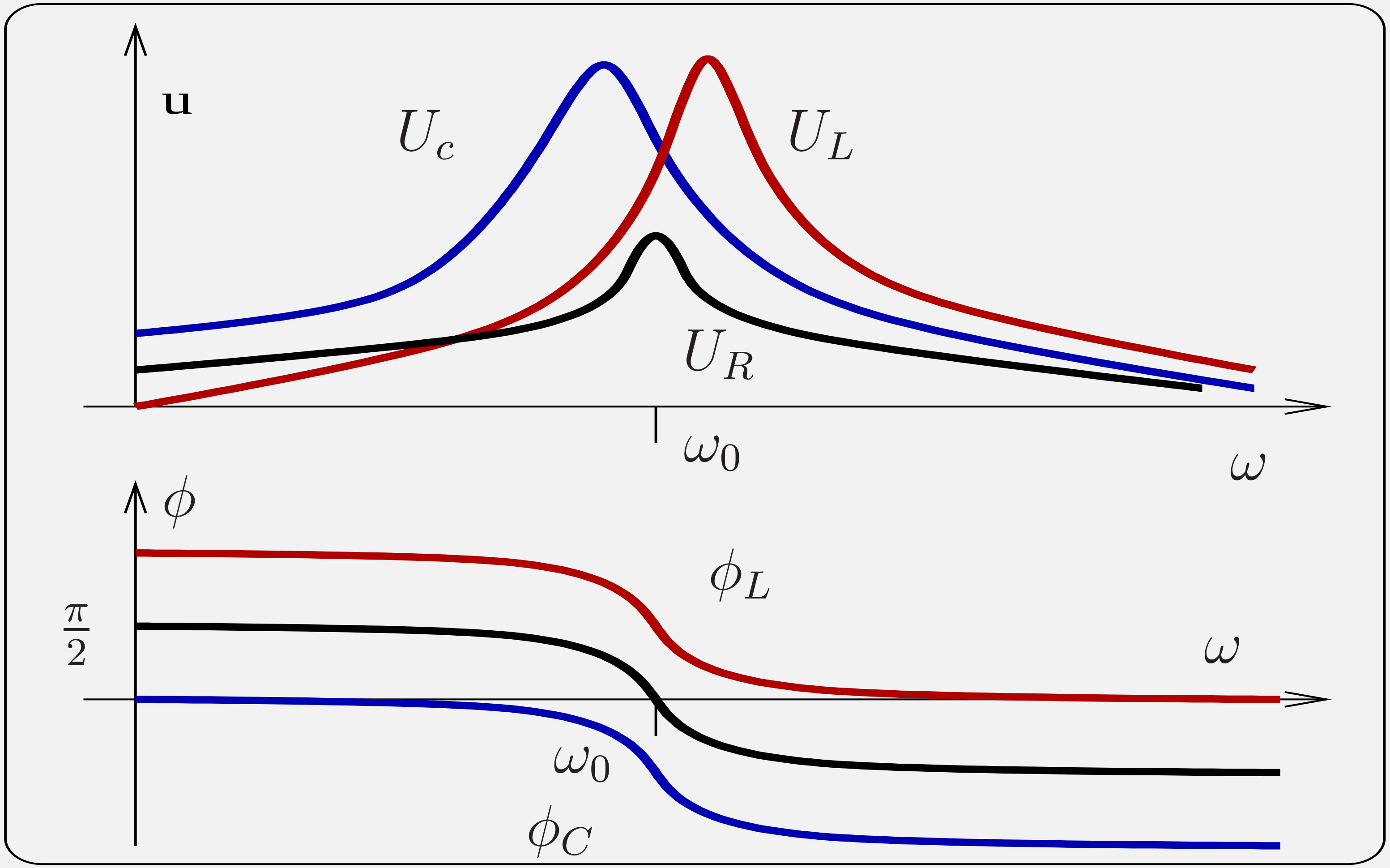
$$\mathbf{U_C} \;=\; \frac{1}{i\omega_0 C}\frac{\mathcal{U}_g}{r}\,e^{i\omega t} = -\frac{i}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathcal{U}_g e^{i\omega t} = -\mathbf{iQ}\,\mathcal{U}_\mathbf{g}\mathbf{e}^{\mathbf{i\omega t}}.$$

Резонанс напряжений: U_C и U_L в противофазе.

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{r}$$



Резонансные кривые $\omega_C = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}},\ \omega_L = \omega_0\sqrt{1+\frac{1}{2Q^2}}$



Задача "Вынужденные колебания"

В последовательном колебательном контуре ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = r/(2L)$, $\omega_0 \gg \delta$) в момент времени $t = 0$ включается генератор, напряжение $U_g(t)$ которого меняется по закону:

$$U_g(t) = \begin{cases} U_0 \cos(\omega_0 - \Delta)t & 0 \le t, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ и построить графики для случаев: а) $\Delta = 0$, б) $\Delta = \delta$, в) $\Delta = 5\delta$.

Физический смысл добротности:

Свободные колебания:

$$A = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t), \quad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 \tau^*}{2};$$

Потери энергии за период:

$$\Delta = 2\pi \times \frac{W_{\text{запас}}}{W_{\text{потери за период}}} =$$

$$= 2\pi \times \frac{\left(\frac{L\mathcal{I}^2}{2}\right)}{\left(\frac{r\mathcal{I}^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\right)} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{\rho}{r} = Q;$$

Физический смысл добротности:

Ширина резонансной кривой:

$$\mathcal{I} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{r + i\rho\xi} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{r(1 + iQ\xi)},$$

$$\mathcal{I}_{\sqrt{2}}(\omega) = \frac{\mathcal{I}_{max}(\omega)}{\sqrt{2}}, \Rightarrow \xi Q = 1, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

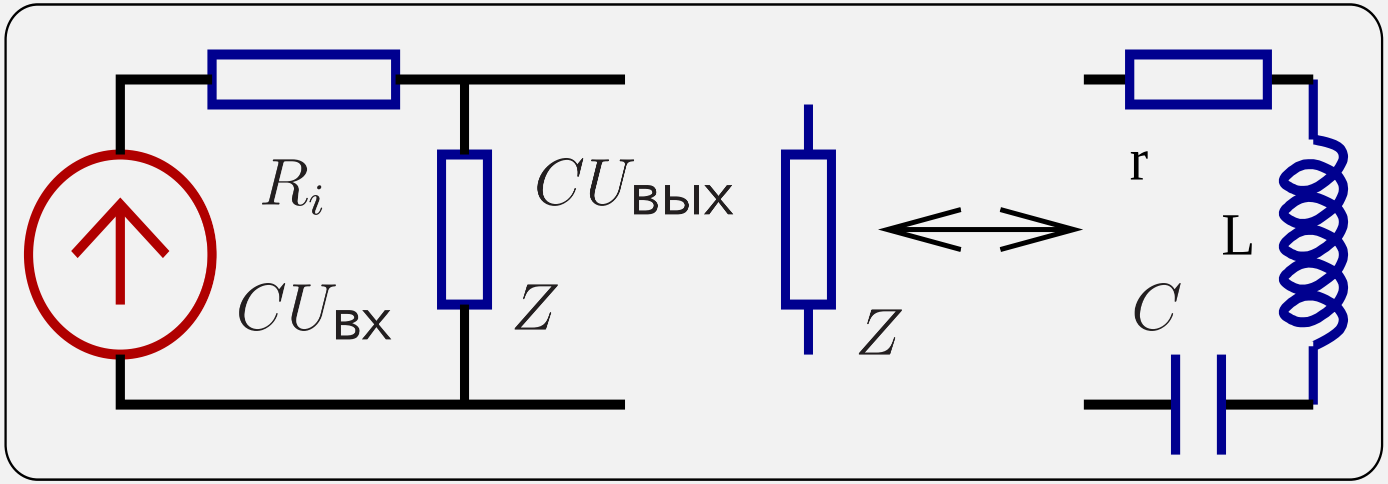
При $Q \gg 1$:

$$\xi \simeq \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \qquad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q},$$

При $Q \ll 1$:

$$\omega_1 \simeq Q\omega_0, \quad \omega_2 \simeq \frac{\omega_0}{Q}$$

Резонансные явления в линейных цепях



$$K(\omega) \quad = \quad \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{Z}{R_i + Z},$$

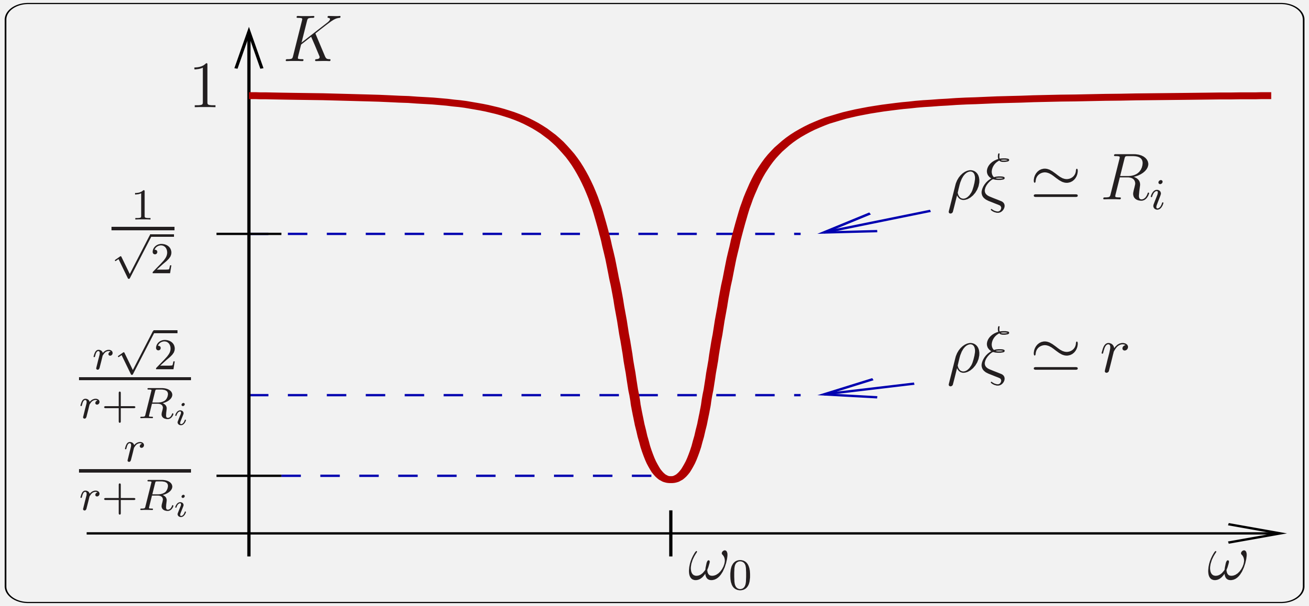
$$R_i \quad \gg \quad Z(\omega), \qquad \Rightarrow \qquad K(\omega) \to 0,$$

$$R_i \quad \ll \quad Z(\omega), \qquad \Rightarrow \qquad K(\omega) \to 1$$

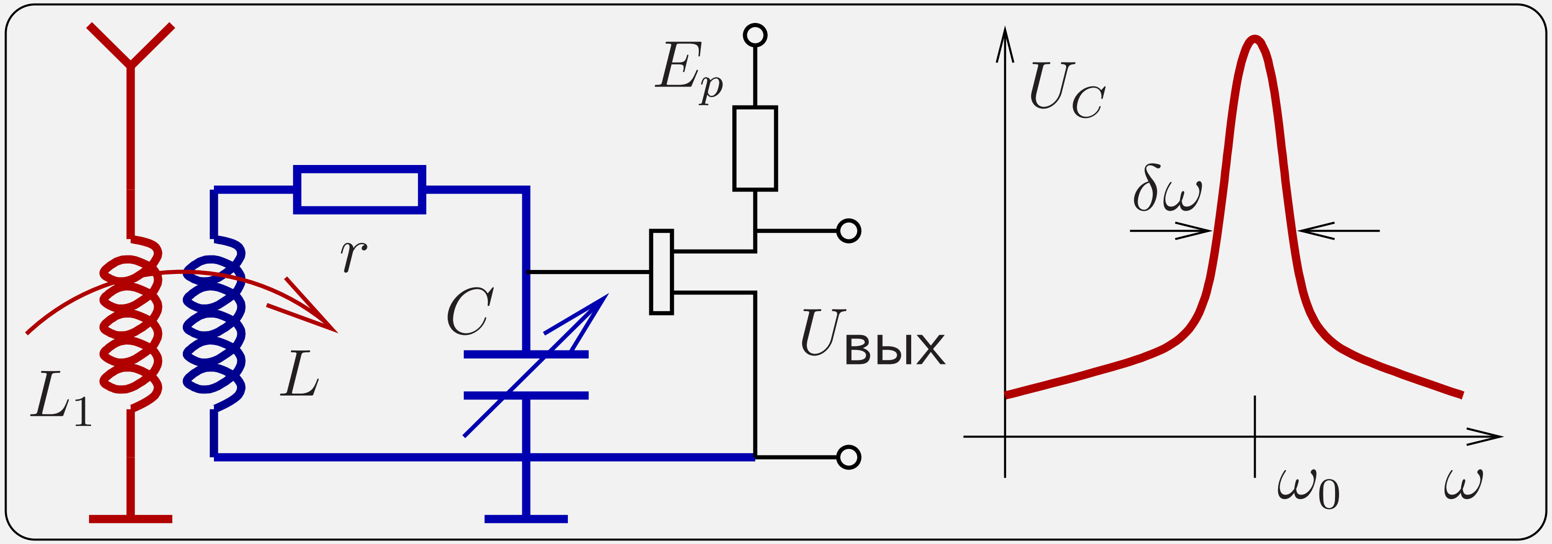
Пример: фильтр-пробка. Пусть $\rho \gg R_i \gg r$:

$$K(\omega) = \frac{Z}{Z+R_i} = \frac{r+i\rho\xi}{R_i+r+i\rho\xi}, \qquad Z = r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = r + i\rho\xi$$

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{\rho}{R_i} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, \qquad Q_{\text{нагр}} \gg 1$$



Пример: полосовой фильтр



$$
\begin{aligned}
R_i \quad &- \quad \text{Сопротивление, вносимое антенной,}\\
K(\omega) \quad &= \quad \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{1/i\omega C}{Z+R_i} = \\
&= \quad \frac{1}{i\omega C(R_i + r + i\rho\xi)} = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\xi)},
\end{aligned}
$$

$$K(\Omega)=\frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i+r+i\rho\xi)}=\frac{Q_{\text{нагр}}\,\omega_0}{i\omega\big(1+iQ_{\text{нагр}}\,\xi\big)},$$

$$Q_{\text{нагр}}=\frac{\rho}{(R_i+r)},\qquad (\rho\gg r,\ R_i)$$

Резонанс: $|K(\omega_0)|=Q_{\text{нагр}},\quad Q_{\text{нагр}}=\dfrac{\rho}{(R_i+r)}\gg 1$

Вдали от резонанса: $\omega\ll\omega_0,\quad \omega\gg\omega_0$

$$|K(\omega)|\ \simeq\ \frac{\omega_0}{\omega|\xi|}=\frac{1}{\left|\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\right|}<1,$$

Ширина полосы фильтра:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\ \simeq\ \frac{R_i+r}{\rho}=\frac{1}{Q_{\text{нагр}}},\quad Q_{\text{нагр}}\gg 1$$

Принцип дуальности линейных цепей:

Любое утверждение остается в силе если **одновременно** заменить:

$$I \iff U,$$

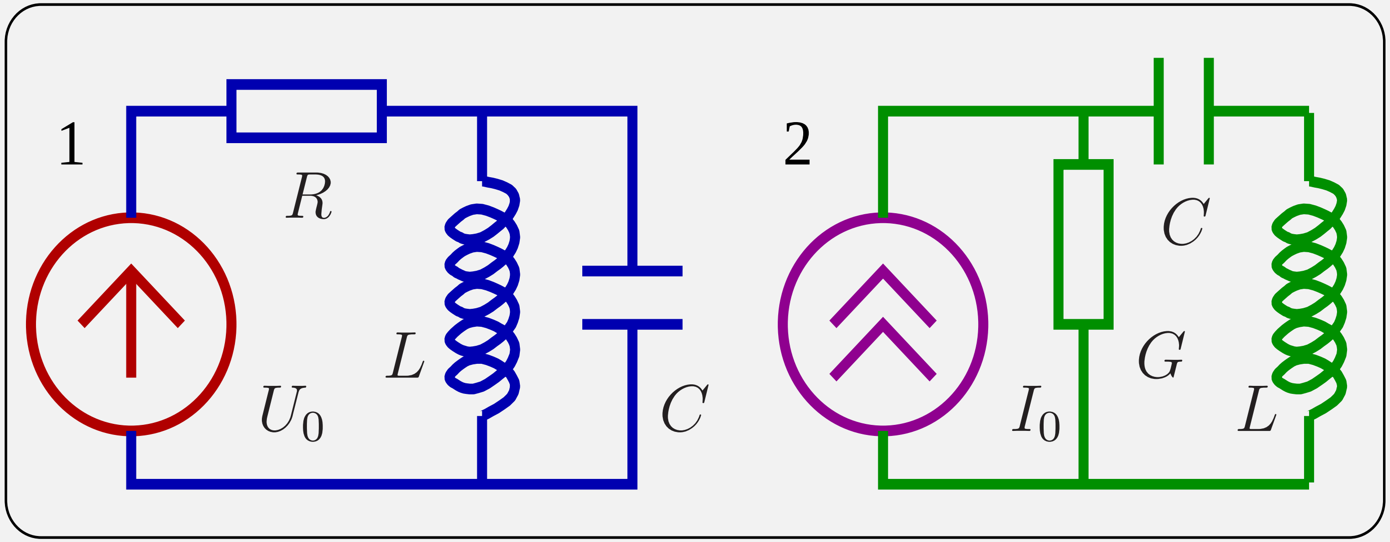
$$L \iff C,$$

$$R \iff G,$$

параллельно $\iff$ последовательно,

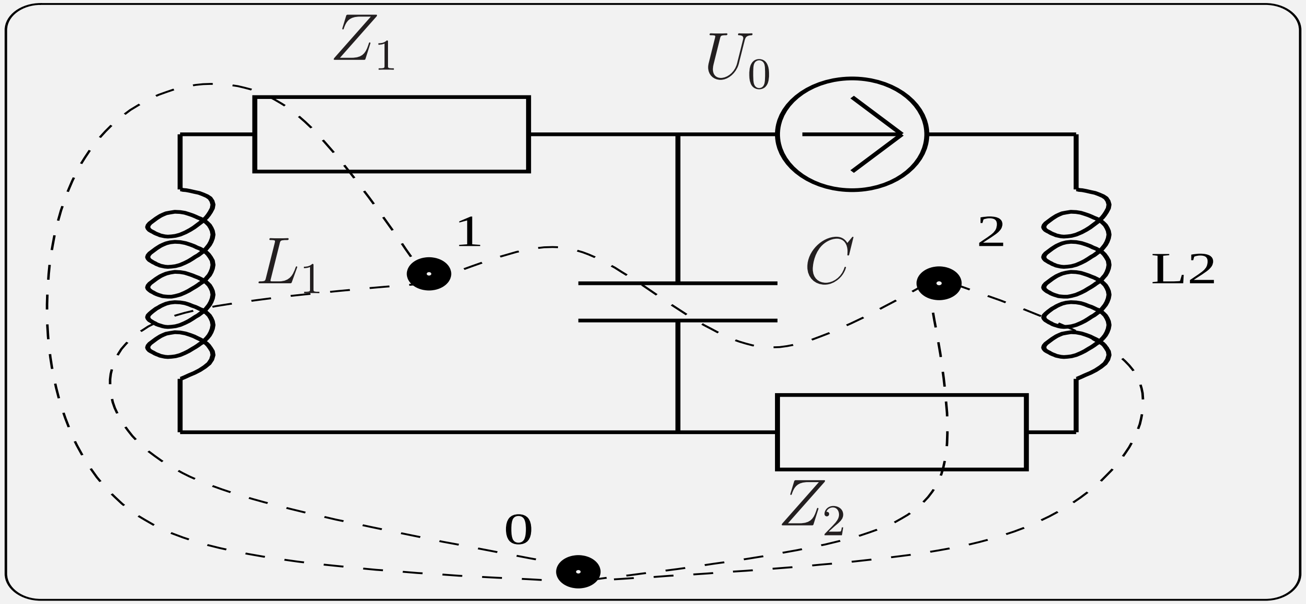
режим КЗ $\iff$ режим ХХ

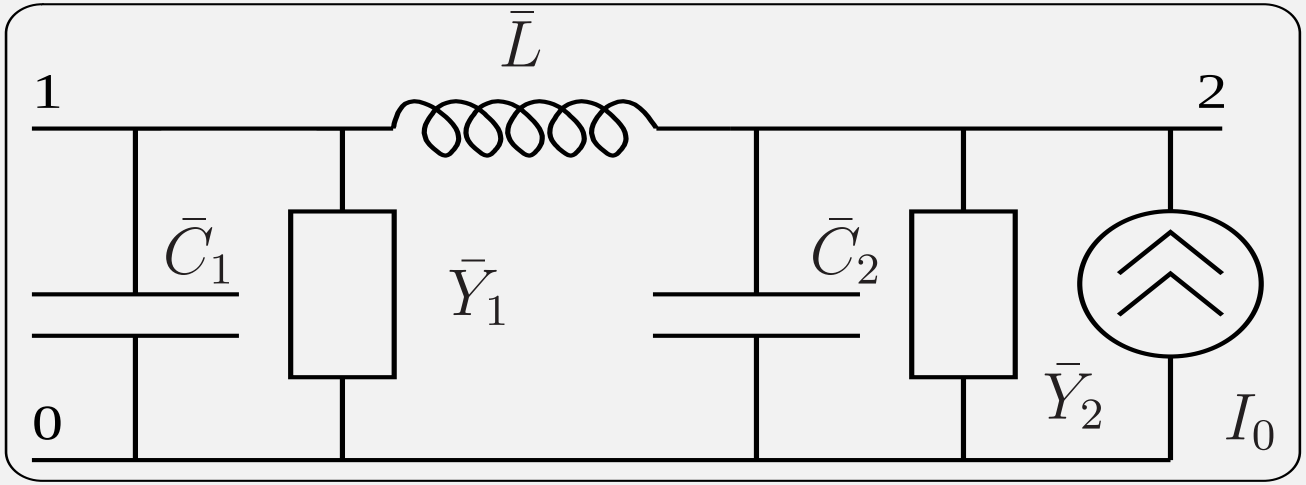
Приинцип дуальности. Пример

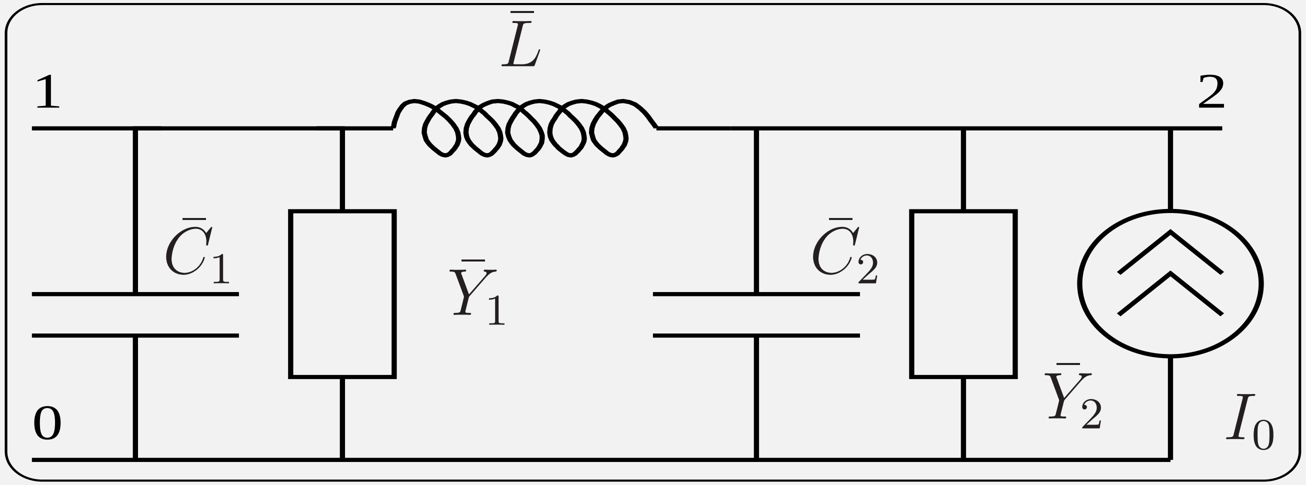


$$\mathbf{1:}\qquad I_R=\frac{U_0}{R+Z_1};\quad Z_1=\frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC},$$

$$\mathbf{2:}\qquad U_G=\frac{I_0}{G+1/Z_2};\quad \frac{1}{Z_2}=\frac{i\omega C}{1-\omega^2 LC}$$


Z_1
U_0
1
2
L_1
C
L2
Z_2
0

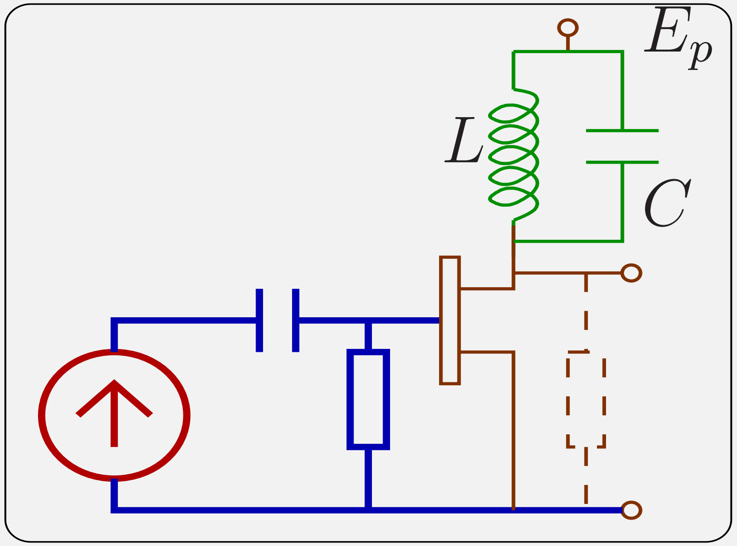

$\bar{L}$
1
2
$\bar{C}_1$
$\bar{Y}_1$
$\bar{C}_2$
$\bar{Y}_2$
0
I_0

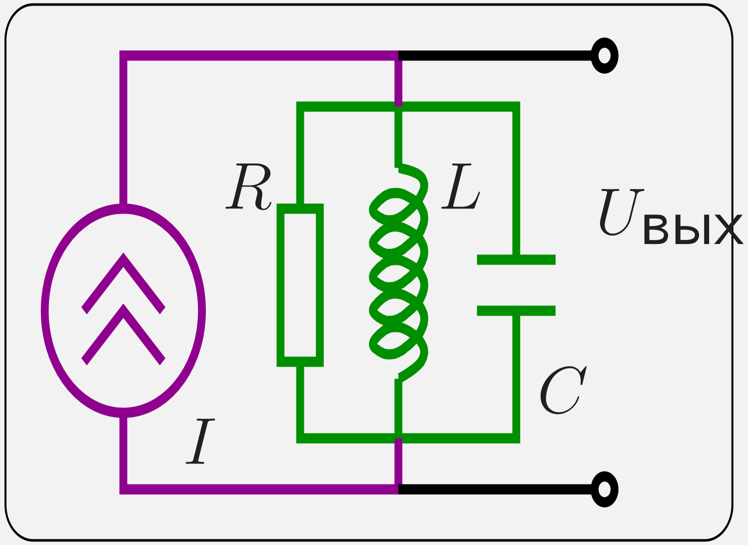


$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{Z_1}, \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{Z_2}, \tag{1}$$

$$i\omega\bar{L} = \frac{1}{i\omega C}, \quad \frac{1}{i\omega\bar{C}_1} = i\omega L_1, \quad \frac{1}{i\omega\bar{C}_2} = i\omega L_2 \tag{2}$$

Параллельный контур ($I,\ U \sim e^{i\omega t}$)

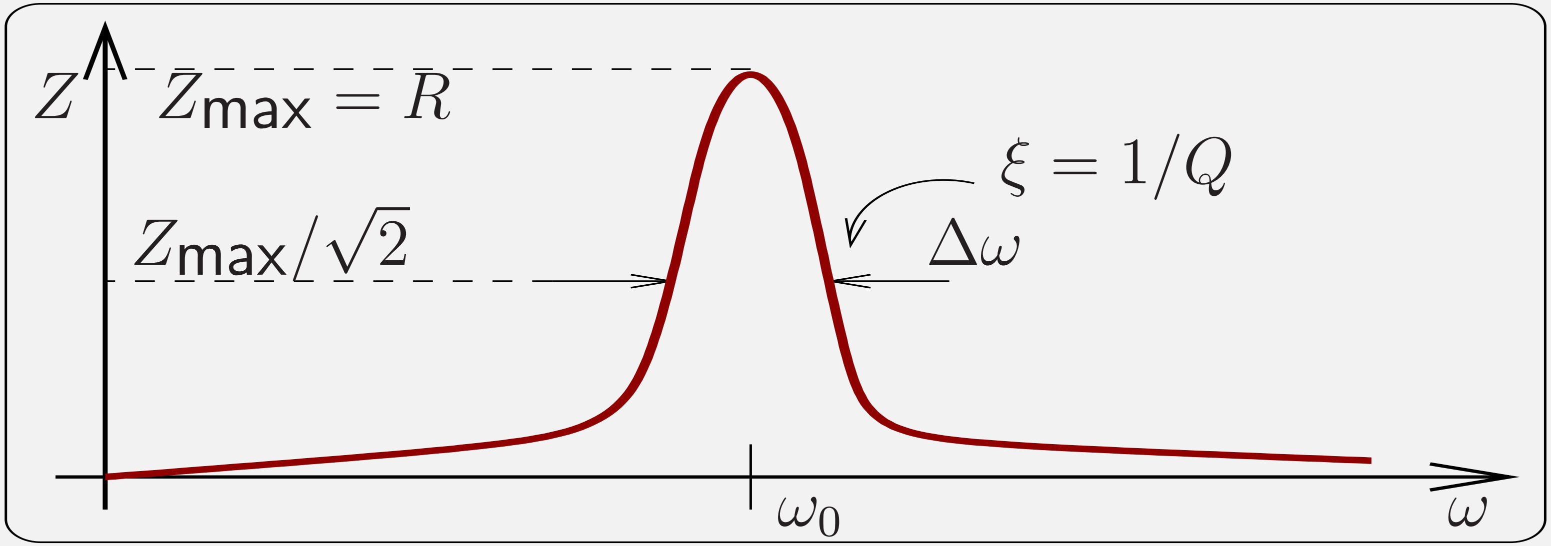




$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right),$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{R}{\rho}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

Параллельный контур. Резонансная кривая



$$U_{\text{вых}}(\omega) = I_0 Z(\omega) = \frac{\rho\, Q}{1 + iQ\xi} \cdot I_0, \qquad I = I_o\, e^{i\omega t}$$

$$I_R = \frac{\rho}{R}\,\frac{Q\, I_0}{1 + iQ\xi}, \qquad I_L = \frac{-i\omega_0}{\omega}\,\frac{Q\, I_0}{1 + iQ\xi},$$

$$I_C = \frac{i\omega}{\omega_0}\,\frac{Q\, I_0}{1 + iQ\xi}.$$

Уровень $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (напряжение или токи I_L, I_C, I_R)

$\Rightarrow \ \xi Q = 1$

При $Q \gg 1$: $\quad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \quad \Delta\omega \simeq \dfrac{\omega_0}{Q},$

При $Q \ll 1$: $\quad \omega_1 \simeq Q\omega_0, \quad \omega_2 \simeq \dfrac{\omega_0}{Q}$

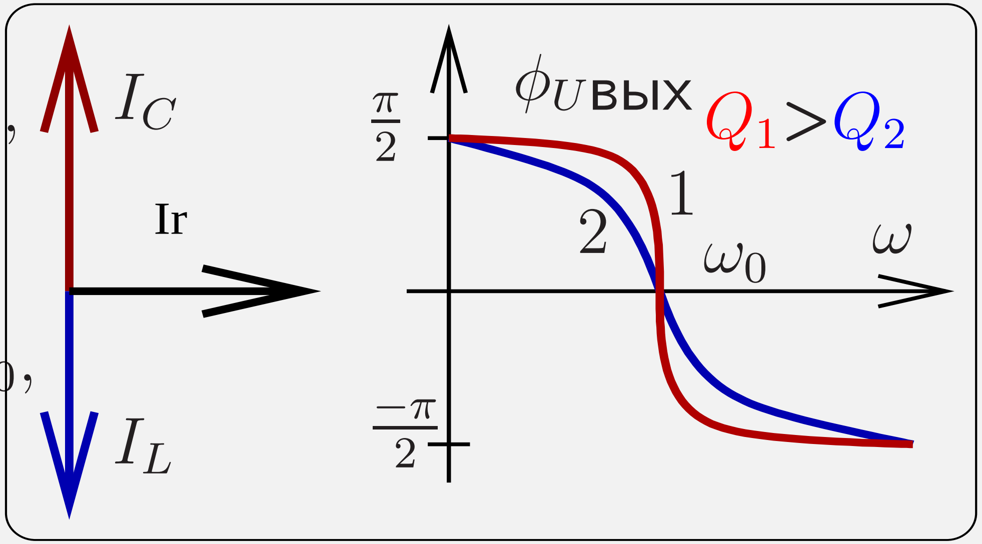
Резонанс токов:

$$\omega = \omega_0 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$U_{\text{вых}}(\omega_0) \quad = \quad I_0 R,$$

$$I_L(\omega_0) \quad = \quad -iQI_0,$$

$$I_C(\omega_0) \quad = \quad iQI_0.$$



Добротность

Разные определения добротности Q:

$$Q = \frac{\text{Запасенная энергия}}{2\pi \times (\text{Энергия потерь за период})},$$

$$Q = \frac{\omega_0 \tau^*}{2}, \qquad \tau^* \text{ — время затухания}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \qquad \Delta\omega = \frac{2}{\tau^*} \text{ — ширина полосы}$$

$$Q = \frac{\rho}{r} \quad \text{(последовательный контур)}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

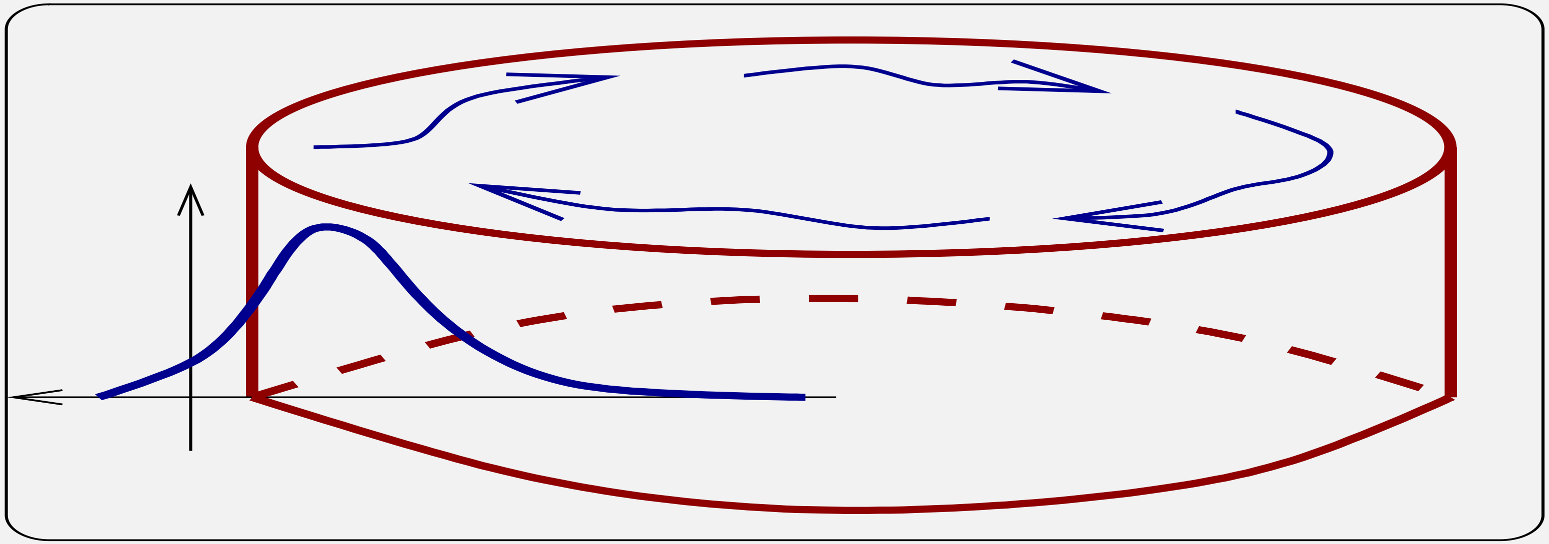
$$Q = \frac{R}{\rho} \quad \text{(параллельный контур)}$$

Примеры:

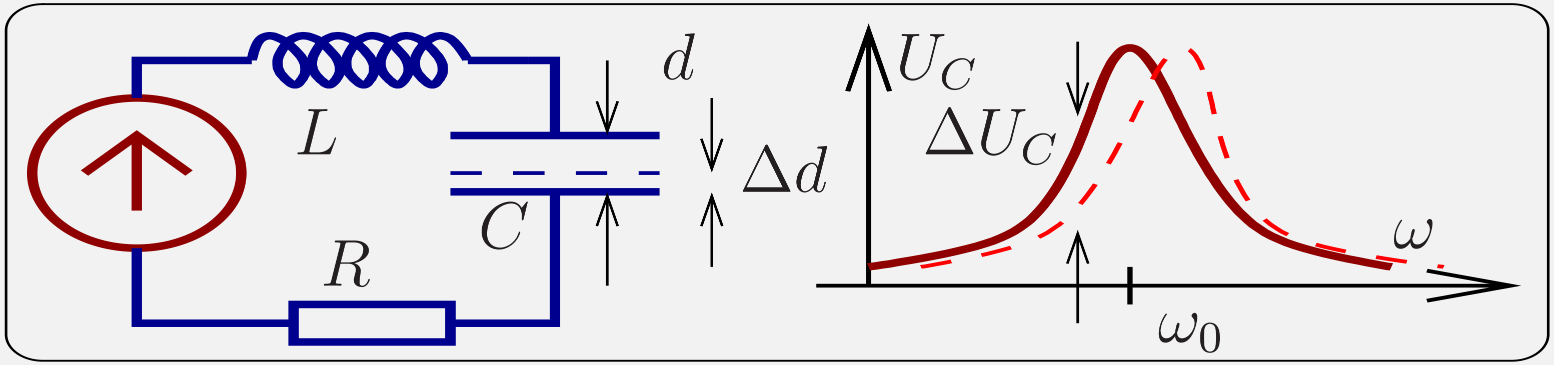
Обычн. LC контур	$Q \simeq 50 \dots 300$	$f = 10^5 \dots 10^8$ Гц
СВЧ резонатор	$Q \simeq 50 \dots 10^5$	$f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц
СП СВЧ резонатор	$Q \simeq 10^6 \dots 10^{10}$	$f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц
Рекорд	$Q \simeq 5 \times 10^{11}$	($T = 1.3$ K)
Рекорд	$Q \simeq 1.5 \times 10^9$	(сапфир, $T = 4$ K)
Микрорезонаторы	$Q \simeq 3 \times 10^9$	(пл. кварц, $f \sim 10^{15}$ Гц)
Микрорезонаторы	$Q \simeq 10^{10}$	(CaF_2, $f \sim 10^{15}$ Гц)

Диэлектрические резонаторы на эффекте полного внутреннего отражения — в СВЧ диапазоне из сапфира, плавленого кварца и в оптике из плавленого кварца.

В сапфире продемонстрирован уровень фундаментальных потерь $Q \sim 1/T^5$.



Емкостной датчик



$$\frac{\Delta U_C}{U_C} = \frac{Q}{2}\frac{\Delta d}{d},$$ доказать — задача “Емк. датчик”

$$\Delta d = 1\times 10^{-9}\ \text{cm} \times \frac{d}{1\times 10^{-2}\ \text{cm}} \times \frac{\Delta U_C/U_C}{1\times 10^{-5}} \times \frac{200}{Q}$$

Если $Q = 200$, $\frac{\Delta U_C}{U_C} = 1\times 10^{5}$, $d = 1\times 10^{-2}$ см, то $\Delta d = 1\times 10^{-9}$ см.

Оценка:

Если $Q = 200, \quad \frac{\Delta U_C}{U_C} = 1 \times 10^5, \quad d = 1 \times 10^{-2}$ см, то $\Delta d = 1 \times 10^{-9}$ см.

Достигнуто (физфак МГУ, 1979):

$\boldsymbol{\Delta d = 6 \times 10^{-17}}$ **см (!)**

при $Q = 5 \times 10^4, \ d = 3 \times 10^{-4}$ см

и времени измерения $\tau = 1$ сек.

№3 "Емкостной датчик"

Доказать формулу для емкостного датчика

$$\Delta U_C \simeq \frac{1}{2}\, Q U_C\, \frac{\Delta d}{d}$$

Пусть $\Delta d = d_0 \cos \Omega t$.

Каковы ограничения на d_0 и Ω?

Как выбирается частота генератора?

Пределы измерения малых смещений

Оптика: резонатор Фабри-Перо

$$\Delta d \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{W\tau}} \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{F}}\frac{1}{\sqrt{N}},$$

где $\mathcal{F} = \frac{\pi}{1-R}$ — резкость, W — мощность, N — число использованных фотонов, R — коэффициент отражения зеркала.

Радиофизика:

$$\Delta d \simeq \frac{d}{Q}\sqrt{\frac{\kappa_B T}{W\tau}} \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{F}} \times \frac{1}{\sqrt{N}},$$

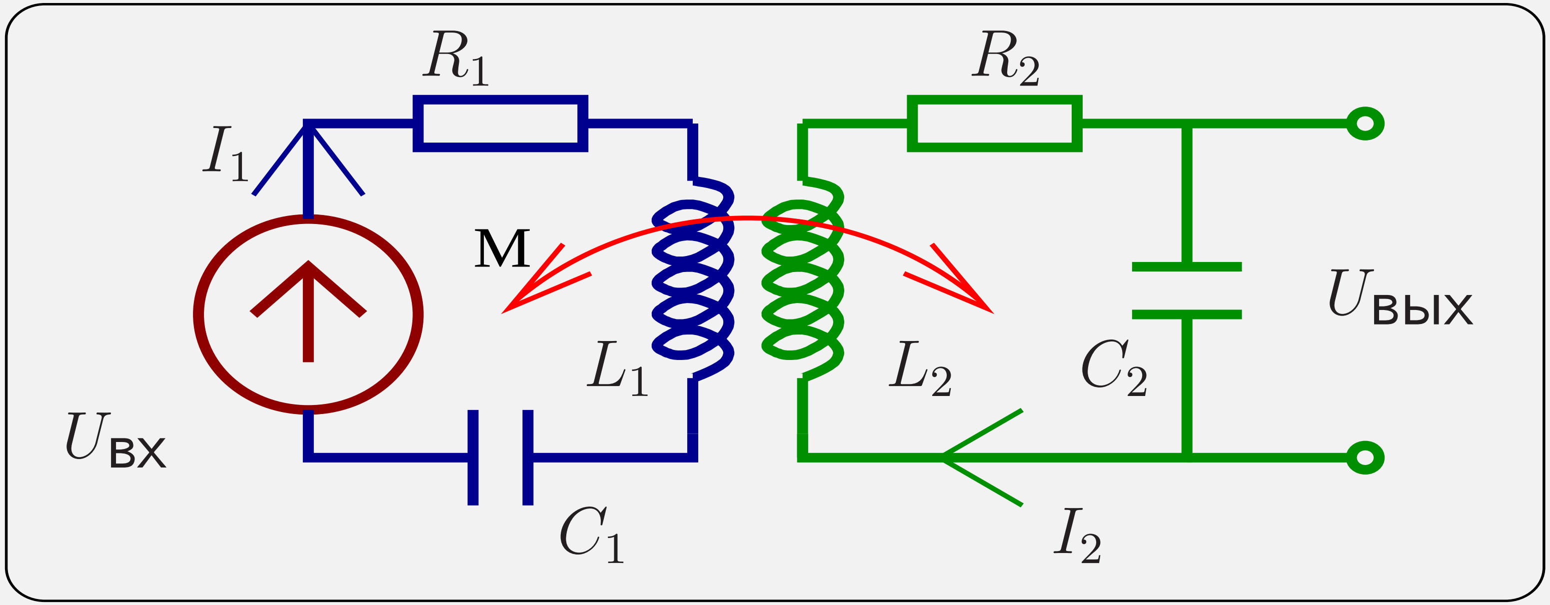
Что меньше: $\dfrac{d}{Q}$ или $\dfrac{\lambda}{\mathcal{F}}$?

В оптике $\dfrac{\lambda}{\mathcal{F}} \simeq \dfrac{10^{-4}\text{см}}{10^{6}} \simeq 10^{-10}$ см.

Для регистрации гравитационных волн нужно

$$\Delta d \simeq 10^{-17} \text{ см за } \tau \simeq 10^{-3} \text{ сек.}$$

Связанные контуры



$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + \int \frac{I_1}{C_1}\,dt + M\frac{dI_2}{dt} = U_{\text{ВХ}}(t),$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \int \frac{I_2}{C_2}\,dt + M\frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Гармоническое воздействие: $U_{\mathbf{вх}}(t) = U_0 e^{i\omega t}$.

Рассматриваем **установившийся** процесс. Заменяем

$$\frac{dI_1}{dt} \quad \rightarrow \quad i\omega, \qquad \int dt \rightarrow 1/i\omega.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_1\left(i\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{i\omega C_1}\right) + i\omega M\, I_2 &= U_0,\\
I_2\left(i\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}\right) + i\omega M\, I_1 &= 0,\\
L_1\omega_{01}\, I_1\left(\frac{R_1}{L_1\omega_{01}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega}\right]\right) + i\omega M\, I_2 &= U_0,\\
L_2\omega_{02}\, I_2\left(\frac{R_2}{L\omega_{02}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega}\right]\right) + i\omega M\, I_1 &= 0
\end{aligned}$$

Рассмотрим для простоты случай

$$L_1 = L_2 = L, \quad C_1 = C_2 = C, \quad R_1 = R_2 = R.$$

Обозначим $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \delta = \frac{R}{\omega_0 L}, \quad \kappa = \frac{M}{L}\,\frac{\omega}{\omega_0}.$

Тогда: $$(\delta + i\xi)I_1 + i\kappa I_2 = \frac{U_0}{\omega_0 L}, \qquad (3)$$

$$i\kappa I_1 + (\delta + i\xi)I_2 = 0, \qquad (4)$$

Комбинируем:

$$(3) \times i\kappa - (4) \times (\delta + i\xi) \;\Rightarrow\; I_1 \times 0 - \left(\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2\right) I_2 = \frac{i\kappa U_0}{\omega_0 L},$$

$$U_{\text{вых}}(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{i\omega C} = -\,\frac{U_0\,\kappa\,\frac{\omega_0}{\omega}}{\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2}$$

Результат:

$$U_{\text{вых}}(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{i\omega C} = -\frac{U_0\,\kappa\,\frac{\omega_0}{\omega}}{\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2}$$

$$K(\omega) = \frac{-\kappa\,\omega_0}{\omega\big(\kappa^2 + \delta^2 - \xi^2 + 2i\delta\xi\big)}$$

Пусть $Q \equiv 1/\delta \gg 1 \Rightarrow\ \xi \ll 1, \quad k \simeq \text{const}$

Квадрат модуля знаменателя:

$$N = (\kappa^2 + \delta^2 - \xi^2)^2 + 4\delta^2\xi^2,$$

$$\partial_\xi N = 2\xi\big(-2\kappa^2 - 2\delta^2 + 2\xi^2 + 4\delta^2\big) = 0,$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_{2,\,3}^2 = \kappa^2 - \delta^2, \quad \delta = \frac{1}{Q}.$$

$$K(\omega) = \frac{-\kappa\,\omega_0}{\omega\sqrt{(\kappa^2+\delta^2-\xi^2)^2+4\delta^2\xi^2}},$$

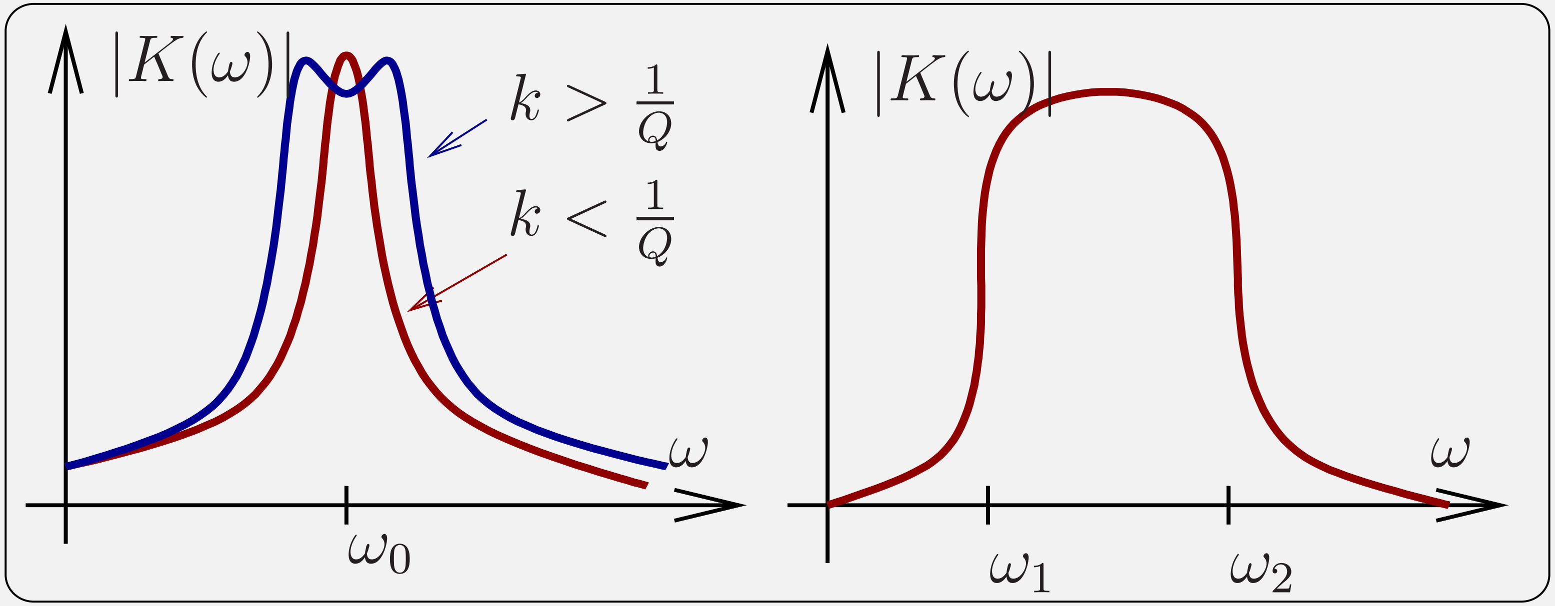
$$\xi_1 = 0, \quad \xi_{2,\,3}^2 = \kappa^2-\delta^2, \quad \delta = \frac{1}{Q}.$$

Коэффициент передачи $K(\omega)$:

при $\kappa < \delta$ — один экстремум,

при $\kappa > \delta$ — три экстремума.

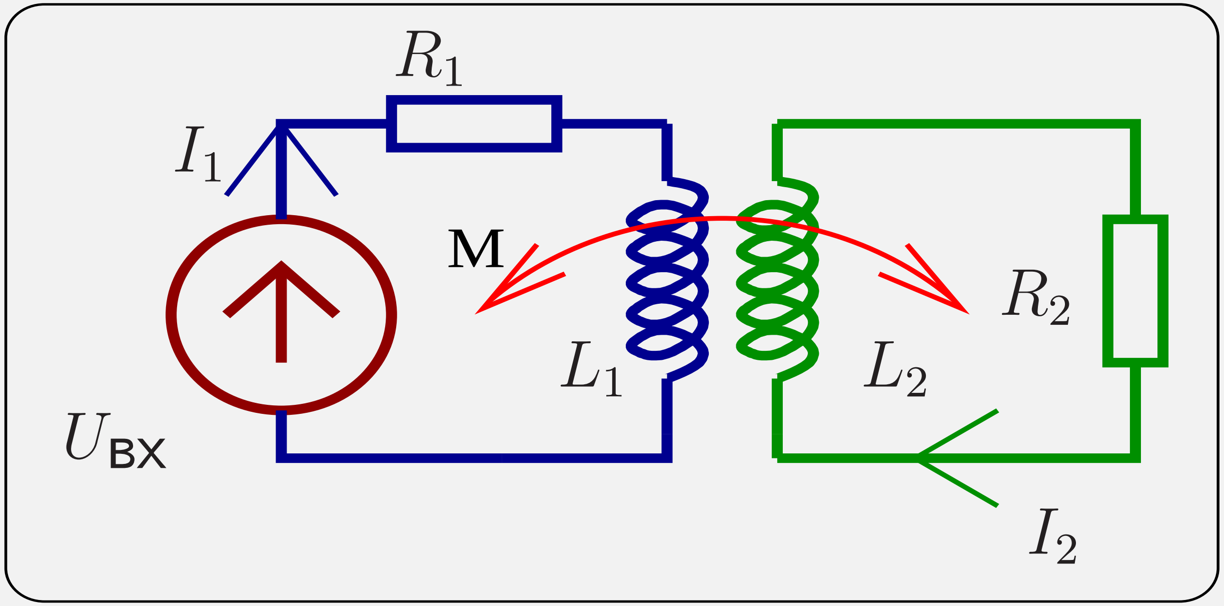
Связанные резонаторы. Резонансная кривая



Комбинация нескольких контуров дает полосовой фильтр.

Ширина полосы и крутизна фронтов зависит от числа и параметров использованых контуров.

Трансформатор



$$U_{\text{вх}} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} (R_1 + i\omega L_1) I_1 - i\omega M I_2 &= U_0, \\ -i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2) I_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(R_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M I_2 &= U_0, &(5)\\
-i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 &= 0. &(6)
\end{aligned}
$$

Условия идеальной трансформации:

$$
\begin{aligned}
M^2 &\simeq L_1 L_2, &(7)\\
R_1 &\ll \omega L_1, \qquad R_2 \ll \omega L_2. &(8)
\end{aligned}
$$

Тогда (6):
$$
\frac{I_2}{I_1} = \frac{i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} \simeq \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n},
$$
$$
\frac{U_{L2}}{U_{L1}} = \frac{I_2\, i\omega L_2}{I_1\, i\omega L_1} \simeq n, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1},
$$

n — коэффициент трансформации.

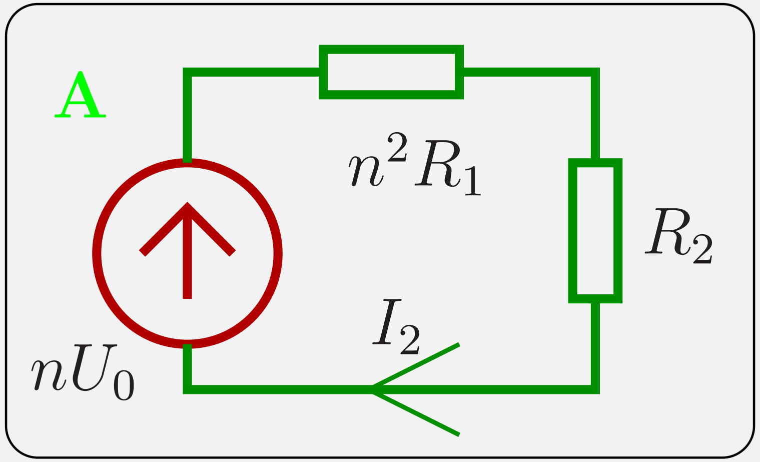
Решаем систему (5,6), учитывая (7,8):

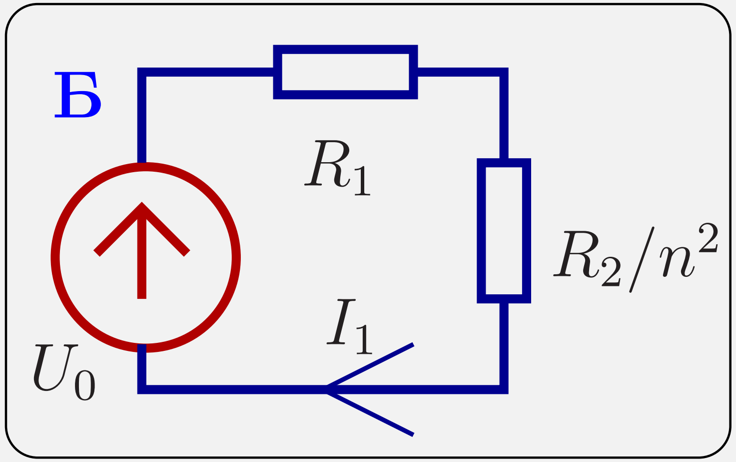
$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} &= (R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + M^2\omega^2 = \\
&= \omega^2(M^2 - L_1L_2) + i\omega(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2 \simeq \\
&\simeq i\omega(L_1R_2 + L_2R_1), \\
\Delta_2 &= iM\omega\, U_0, \quad \Delta_1 = U_0\big(R_2 + i\omega L_2\big) \simeq iL_2\omega\, U_0 \\
I_2 &\simeq \frac{MU_0}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\frac{MU_0}{L_1}}{\frac{R_1L_2}{L_1} + R_2} = \frac{\mathbf{nU_0}}{\mathbf{R_2 + n^2R_1}}, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \\
I_1 &\simeq \frac{L_2U_0}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\mathbf{U_0}}{\mathbf{\frac{R_2}{n^2} + R_1}}
\end{aligned}
$$

Эквивалентные схемы

$$I_2 \simeq \frac{MU_0}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\frac{MU_0}{L_1}}{\frac{R_1L_2}{L_1} + R_2} = \frac{\mathbf{nU_0}}{\mathbf{R_2 + n^2R_1}}, \qquad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$I_1 \simeq \frac{L_2U_0}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\mathbf{U_0}}{\frac{\mathbf{R_2}}{\mathbf{n^2}} + \mathbf{R_1}}$$

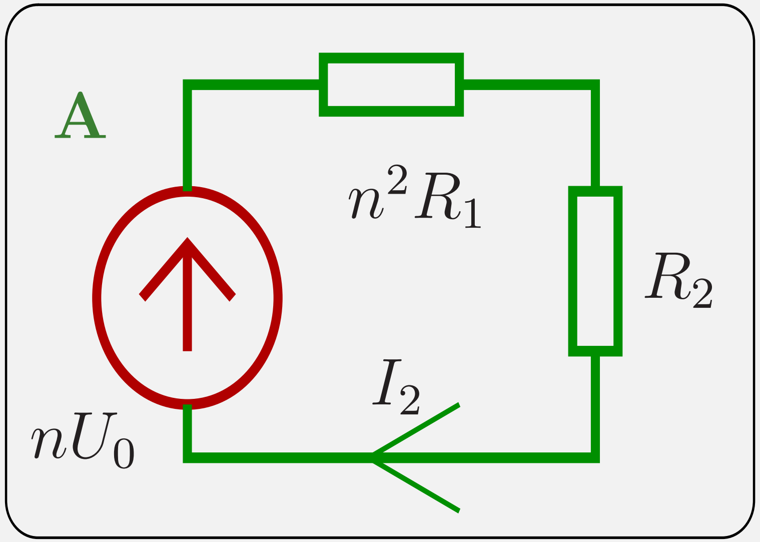


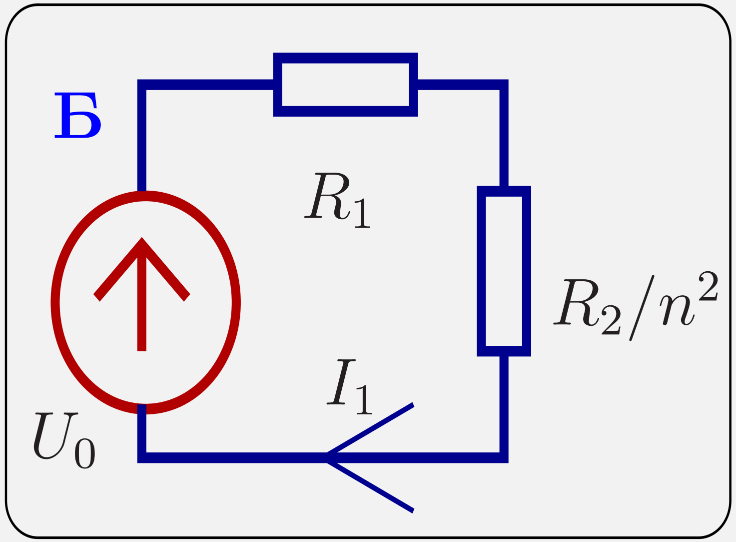


Мощность на сопротивлении R_2:

$$P_2 \;=\; \frac{I_2^2 R_2}{2} \simeq \frac{(nU_0)^2 R_2}{2(n^2 R_1 + R_2)^2} \quad \text{— схема } \mathbf{A},$$

$$P_2 \;=\; \frac{U_0^2 \times \frac{R_2}{n^2}}{2\left(R_1 + \frac{R_2}{n^2}\right)^2} \quad \text{— схема } \mathbf{Б}.$$





А: “приведенна к выходу”, **Б** — “приведенна ко входу”.