Характеристики случайного процесса

Эргодическая гипотеза: усреднение по времени эквивалентно усреднению по ансамблю.

Стационарный процесс: $\bar{x}$, σ *не* зависят от времени.

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \equiv \langle x \rangle,$$

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}, \quad \sigma = \overline{\Delta x^2} = \overline{(x(t)-\bar{x})^2},$$

$$\text{Пусть} \quad \overline{u(t)} = 0, \quad B(\tau) = \overline{u(t)u(t-\tau)},$$

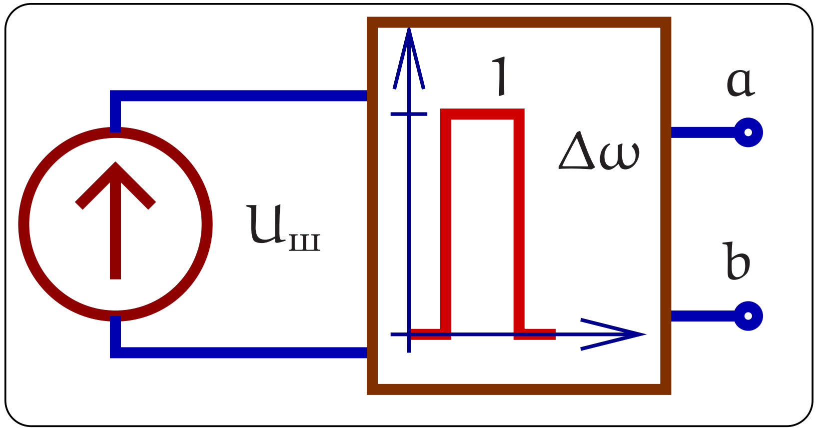
$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t-\tau)\,dt, \quad B(\tau) = B(-\tau), \tag{1}$$

$$B(0) = \sigma = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2\,dt. \tag{2}$$

Спектральная плотность

Традиционное определение спектральной плотности $\tilde{S}(\omega)$:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega)\, \frac{d\omega}{2\pi} \tag{3}$$



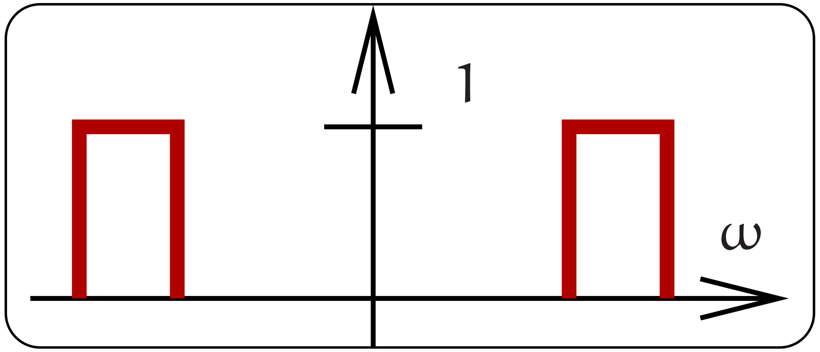
Физический смысл спектральной плотности: среднеквадратичное напряжение шума, генерируемое в единичной спектральной полосе:

$$\Delta u^2 \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_{ab}(t)^2\, dt \simeq \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi} \tag{4}$$

Дисперсия на выходе узкополосного фильтра $\Delta\omega$ (4):

$$\Delta u^2_{\Delta\omega} = \int_{\Delta\omega}\int_{\Delta\omega} \underbrace{\overline{u(\omega)\, u(\omega')^*}}_{2\pi\delta(\omega-\omega')\,\tilde{S}(\omega)}\; e^{i(\omega-\omega')t}\, \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} = \tag{5}$$

$$= \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi}, \tag{6}$$



Другое определение спектральной плотности

Фурье преобразование случайной реализации шума на отрезке времени T:

$$V_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)\, e^{i\omega t}\, dt \tag{7}$$

В пределе $T \gg \tau_c$ — сумма большого числа $\simeq T/\tau_c$ интегралов. Это подобно задаче о случайных блужданиях, в которой, как известно, среднеквадратичный уход пропорционален $\sqrt{T}$.

$V_T(\omega)$ имеет размерность Вольт$\sqrt{\text{сек}}$ или $V/\sqrt{\text{Hz}}$.

Спектральная плотность (“двустороннее” определение):

$$\mathcal{S}_{VV}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \langle |V_T(\omega)|^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \langle V_T(\omega) V_T(-\omega) \rangle \tag{8}$$

Теорема Винера-Хинчина

Формальное преобразование Фурье случайного процесса:

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{i\omega t}\, dt, \quad \overline{u(\omega)} = 0,$$

$$\overline{u(\omega)\, u(\omega')^*} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t)u(t')}\, e^{i(\omega t - \omega' t')}\, dt\, dt' =$$

$$\tau = t - t', \quad \tau' = \frac{t+t'}{2}, \quad dt\, dt' = d\tau\, d\tau', \quad \overline{u(t)u(t')} = B(t-t') = B(\tau),$$

$$\omega t - \omega' t' = \omega\left(\frac{\tau}{2} + \tau'\right) - \omega'\left(-\frac{\tau}{2} + \tau'\right) = (\omega + \omega')\frac{\tau}{2} + (\omega - \omega')\tau',$$

$$\overline{u(\omega)\, u(\omega')^*} = 2\pi\, \delta(\omega - \omega') \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

$$\overline{u(\omega)\, u(\omega')^*} = 2\pi\, \delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_u(\omega).$$

Теорема Винера-Хинчина:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau \\ B(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{S}(\omega)$ — "двусторонняя" спектральная плотность.

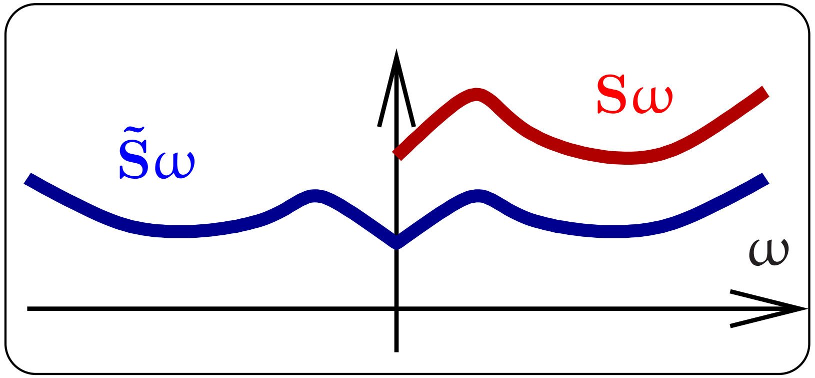
Очевидно, что это совпадает с традиционным определением (3).

$$\sigma = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega)\, \frac{d\omega}{2\pi}$$

“Одностороннее” определение спектральной плотности

Мы будем пользоваться “односторонним” определением спектральной плотности:

$$S(\omega) \quad = \quad 2\tilde{S}_u(\omega)$$



Теорема Винера - Хинчина для “односторонней” спектральной плотности:

$$S_u(\omega) = 4\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\,\cos\omega\tau\,d\tau$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega)\,\cos\omega\tau\,\frac{d\omega}{2\pi}$$

Докажем теорему Винера - Хинчина для “односторонней” спектральной плотности. Имеем:

$$\tilde{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau, \qquad S_u(\omega) = 2\tilde{S}_u(\omega)$$

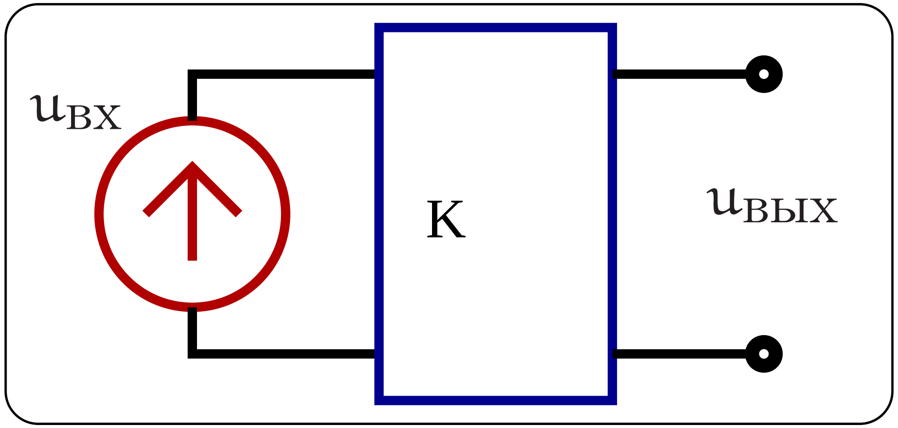
$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \qquad B(\tau) = B(-\tau)$$

$$S_u(\omega) \equiv 2\tilde{S}_u(\omega) = 2\int_0^{\infty} B(\tau)\, \left(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}\right)\, d\tau =$$

$$= \boxed{4\int_0^{\infty} B(\tau)\, \cos(\omega\tau)\, d\tau},$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{S_u(\omega)}{2}\, \left(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}\right) \frac{d\omega}{2\pi} = \boxed{\int_0^{\infty} S_u(\omega)\, \cos(\omega\tau)\, \frac{d\omega}{2\pi}}$$

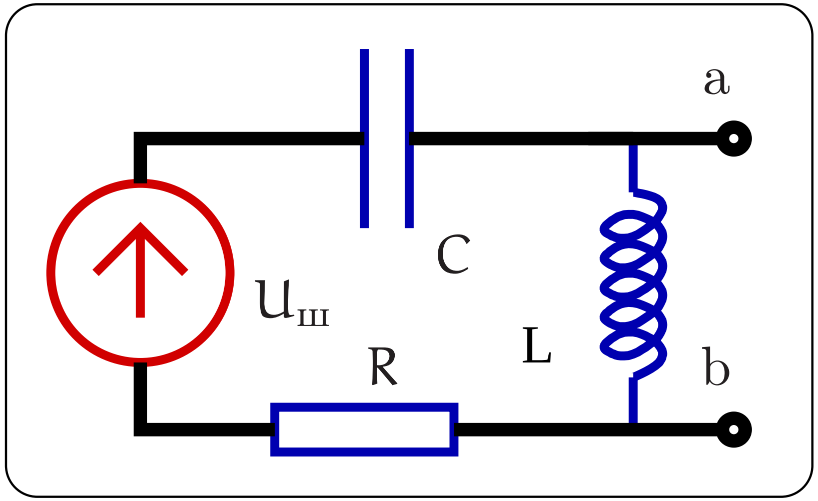
Преобразование шума в линейных цепях



$$u_{\text{вых}}(\omega) = \mathsf{K}(\omega)\, u_{\text{вх}}(\omega)$$

$$\begin{aligned}
\overline{u_{\text{вх}}(\omega)\, u_{\text{вх}}(\omega')^*} \quad &= \quad 2\pi\,\delta(\omega-\omega') \times \tilde{S}_{\text{вх}}(\omega),\\
\overline{u_{\text{вых}}(\omega)\, u_{\text{вых}}(\omega')^*} \quad &= \quad 2\pi\,\delta(\omega-\omega') \times \tilde{S}_{\text{вых}}(\omega),\\
u_{\text{вых}}(\omega = \mathsf{K}(\omega)\, u_{\text{вх}}, \quad &\Rightarrow \quad \tilde{S}_{\text{вых}}(\omega) = |\mathsf{K}(\omega)|^2\, \tilde{S}_{\text{вх}}(\omega),\\
\text{Результат:} \quad & \quad \mathbf{S}_{\text{вых}}(\omega) = |\mathbf{K}(\omega)|^{\mathbf{2}}\, \mathbf{S}_{\text{вх}}(\omega)
\end{aligned}$$

Пример: преобразование шума в линейных цепях



Пусть $S(\omega)$ — спектральная мощность шумового напряжения $U_ш$. Какова спектральная мощность $S_{ab}(\omega)$ напряжения U_{ab}?

$$U_{ab} = U_ш \times K(\omega), \quad K(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L + 1/i\omega C},$$

$$S_{ab} = S(\omega) \times \left|K(\omega)\right|^2 = \frac{S(\omega)\,\omega^2 L^2}{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$$

Основные виды шумов

1). Тепловой шум (белый шум).

2). Дробовой шум (белый шум).

3). Фликкер шум (избыточный шум или “1/f” - шум).

Белый шум

$S_u(\omega) = S_0$ (не зависит от ω).

$$B(\tau) = B(\tau) = \int_0^\infty S_u(\omega)\,\cos(\omega\tau)\,\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\,\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2}\,\delta(\tau)$$

Это модель шума *без памяти*. Это только модель.

"Абсолютно пьяный человек"

Шаг длины $\pm\Delta x$, через время $\Delta\tau$: $\langle \Delta x_i \rangle = 0$, $\langle \Delta x_i^2 \rangle = \Delta x^2$

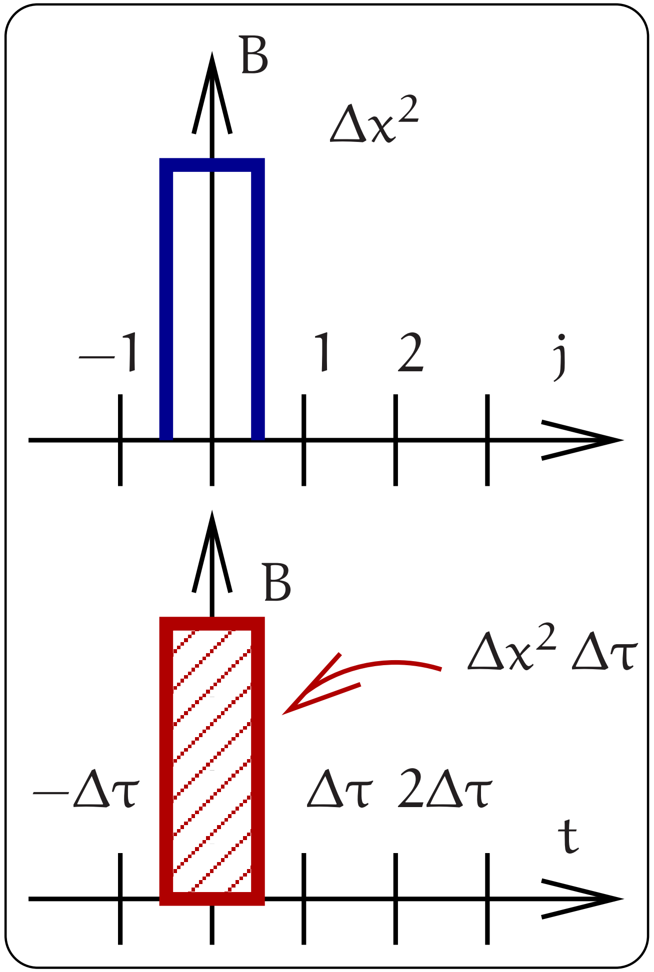
N шагов: $y_i = \{\Delta x_i\}$, $1 < i < N$.

$$\bar{y} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{u}} = \lim_{\mathbf{T}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{-\mathbf{T}/2}^{\mathbf{T}/2} \mathbf{u}(\mathbf{t})\, \mathbf{dt},$$

$$\overline{y^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2 = \Delta x^2, \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{u^2}} = \lim_{\mathbf{T}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{-\mathbf{T}/2}^{\mathbf{T}/2} \mathbf{u}(\mathbf{t})^{\mathbf{2}}\, \mathbf{dt}.$$

$$B_j = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \Delta x_{i-j} = (\Delta x)^2\, \delta_{0j}, \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{B}(\tau) = \lim_{\mathbf{T}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{-\mathbf{T}/2}^{\mathbf{T}/2} \mathbf{u}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}-\tau)\, \mathbf{dt}. \tag{10}$$

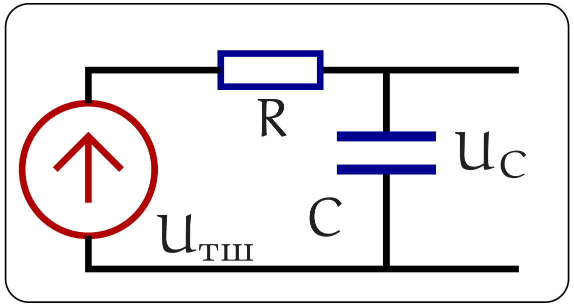


Устремляем $\Delta\tau \to 0$ так, что $\Delta x^2 \Delta\tau = B_0$ — постоянная. $\delta_{ij}/\Delta\tau \ \to \ \delta(\tau)$:

$$\mathbf{B_j = (\Delta x)^2\,\delta_{0j}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B_0}\delta(\tau)$$

Время "памяти" — $\Delta\tau$.

Тепловой шум



$$S_{тш}(\omega) = S_0,$$
$$\overline{U_C^2} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} S_C(\omega).$$

$$U_C(\omega) = \frac{U_{тш}/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)}, \quad S_C(\omega) = \frac{S_0}{1 + (\omega RC)^2},$$

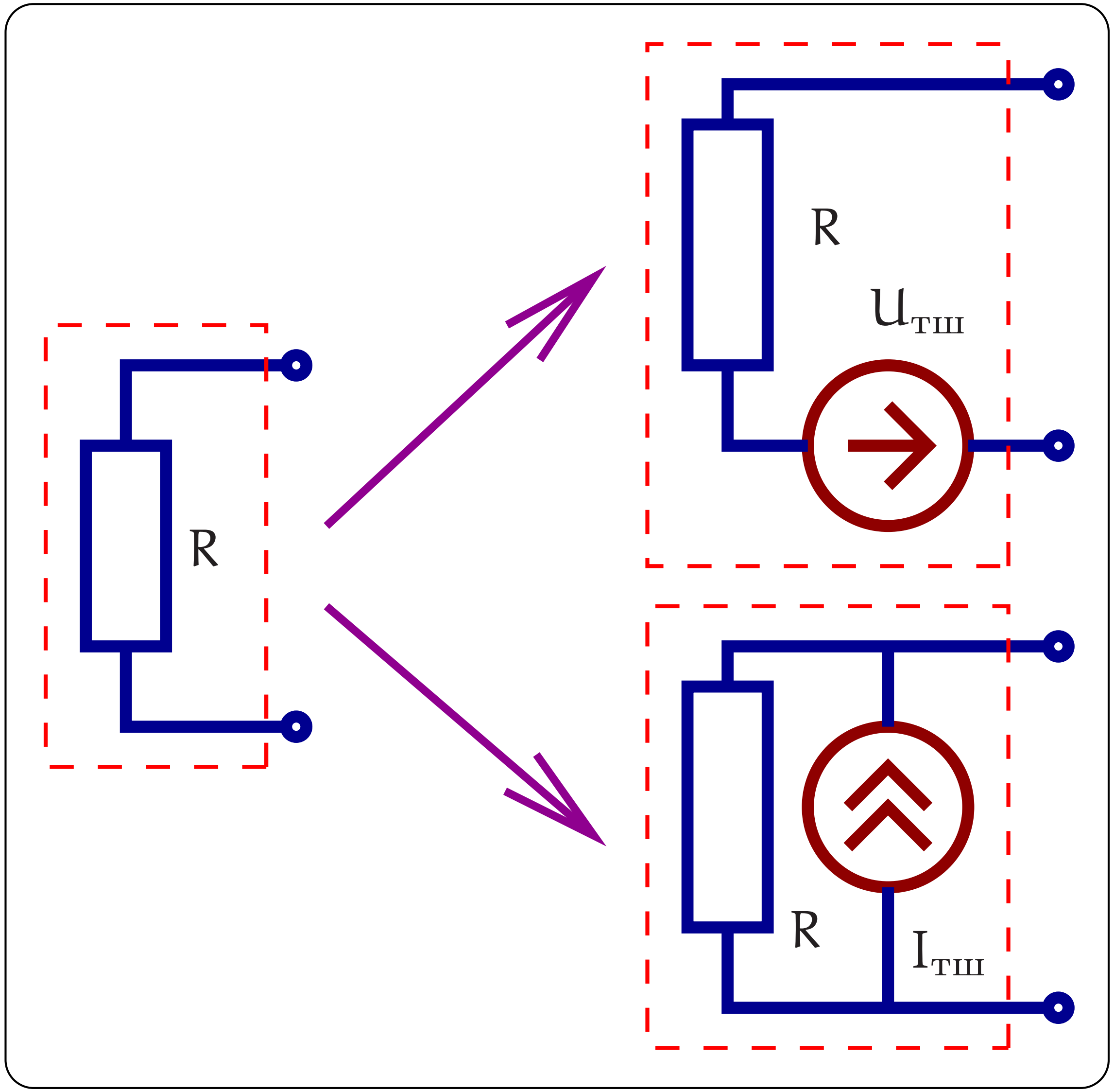
$$\overline{U_C^2} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\frac{S_0}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{S_0}{2\pi RC}\,\mathrm{arctg}(\omega RC)\Big|_0^\infty = \frac{S_0}{4RC},$$

$$\frac{C\overline{U_C^2}}{2} = \frac{\kappa T}{2}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_0 = 4\kappa TR},$$

Флуктуации в полосе $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$:

$$\Delta U_{тш}^2 \simeq \mathbf{4\kappa TR\,\Delta f = \frac{2}{\pi}\,\kappa TR\,\Delta\omega}$$

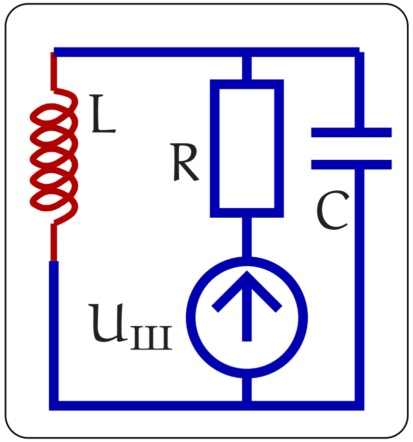
Эквивалентные источники теплового шума



$$\mathbf{S_U}(\omega) = \mathbf{4\kappa TR},$$

$$\mathbf{S_I}(\omega) = \frac{\mathbf{4\kappa T}}{\mathbf{R}}$$

. **№9 "Найквист"**



Доказать теорему Найквиста исходя из схемы. L и C – произвольные. Рассмотреть случай $C \to 0$.

В квантовом случае ($T \to 0$):

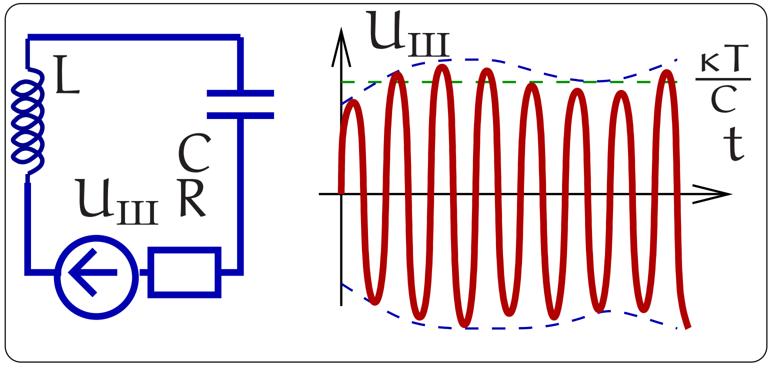
$$S_0 \quad = \quad 4\kappa TR \Rightarrow 4R\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1}\right),$$

$$T = 300^\circ K \quad \Rightarrow \quad f_{гр} = \frac{\omega_{гр}}{2\pi} = \frac{\kappa T}{\hbar} \simeq 6 \cdot 10^{12}\ \text{Гц}.$$

При $f > f_{гр}$ надо пользоваться квантовой формулой.
Теорема Найквиста — частный случай флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ). Смысл ФДТ: чем больше потери, тем больше спектральная плотность шумов.

№10 “Вариация шумовой амплитуды”

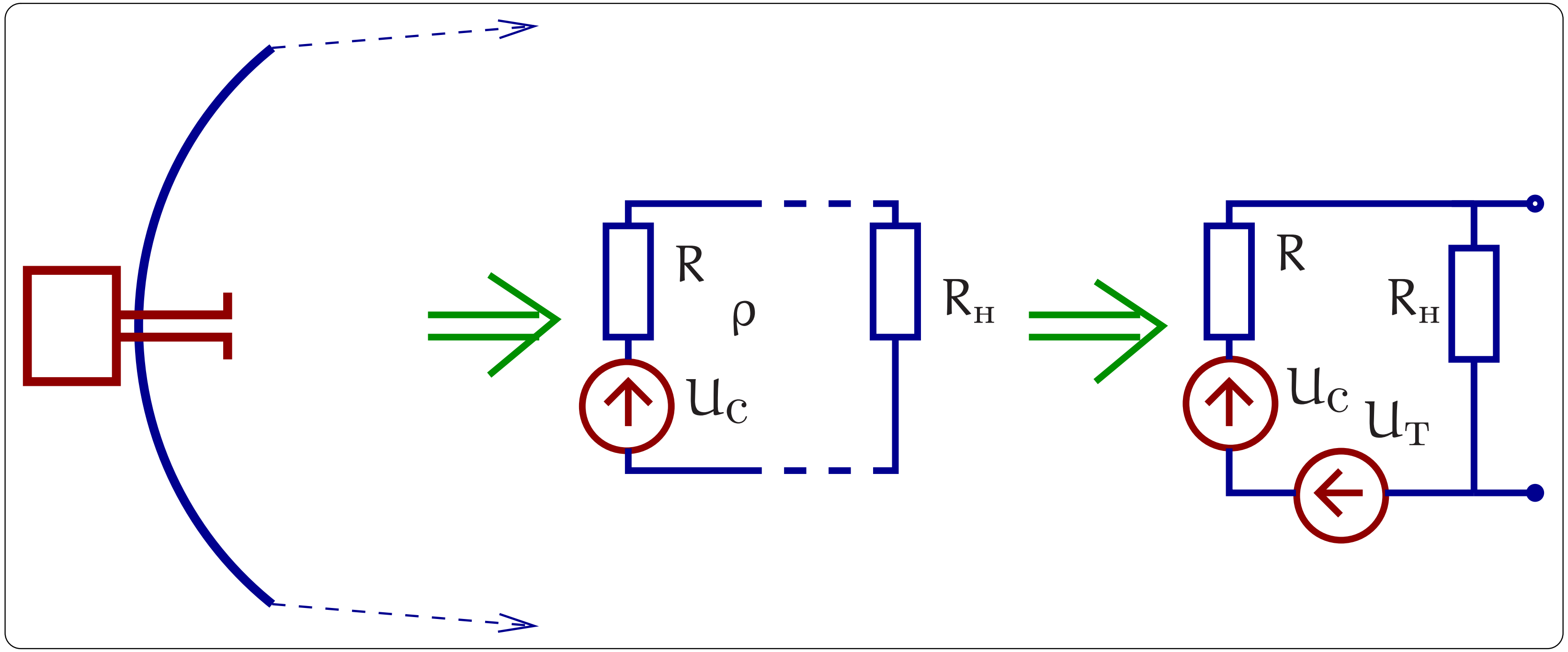
$$\tau^* = \frac{2Q}{\omega_0},$$
$$U_C(t) = U_{C0}(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$



$U_{C0}(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные медленные функции с характерным временем (временем корреляции) τ^*. Доказать, что при $\tau \ll \tau^*$ вариация амплитуды напряжения на конденсаторе равна

$$\delta U_{C0} = \sqrt{\langle (U_{C0}(t+\tau) - U_{C0}(t))^2 \rangle} \simeq \sqrt{\frac{\kappa T}{C}} \sqrt{\frac{\tau}{\tau^*}}$$

Минимально обнаружимая мощность



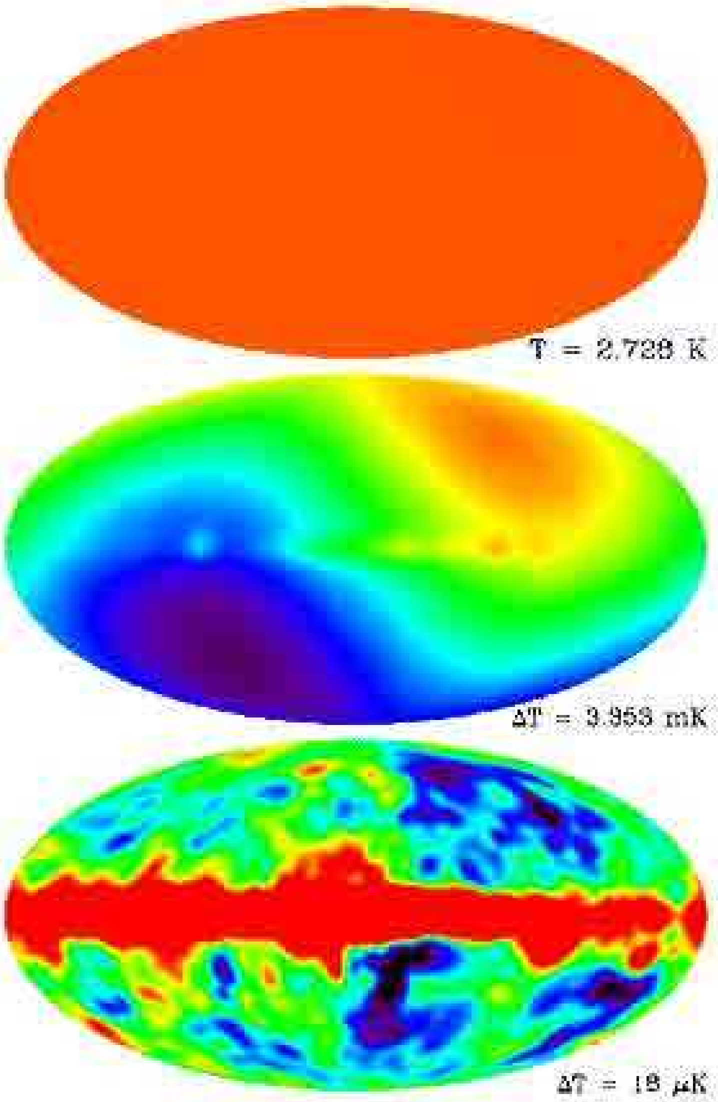
Согласование: $\rho = R_H = R$.

Тепловая мощность:

$$\mathbf{W_T = \frac{U_T^2 R}{(R+R_H)^2} = \kappa T\,\Delta f}$$

Условие обнаружения: $U^2_{\text{сигн}} > U^2_T$, или $W_{\text{сигн}} > W_T$.

Если диаграмма вне ярких радиоисточников, то W_T соответствует $T \simeq 3°K$ — реликтовый э.м. шум.


T = 2.728 K
ΔT = 3.353 mK
ΔT = 18 μK

Эквивалентная шумовая температура усилителя

Пусть все согласовано. Выходное напряжение:

$$U^2_{\text{вых}} = K^2 \cdot 4\kappa(T_{\text{вх}} + T_{\text{у}})R_{\text{вх}}\,\Delta f,$$

$$F = \left(\frac{U_s}{U_n}\right)^2_{\text{вход}} \Bigg/ \left(\frac{U_s}{U_n}\right)^2_{\text{выход}} = \frac{T_{\text{вх}} + T_{\text{у}}}{T_{\text{вх}}} = 1 + \frac{T_{\text{у}}}{T_{\text{вх}}}$$

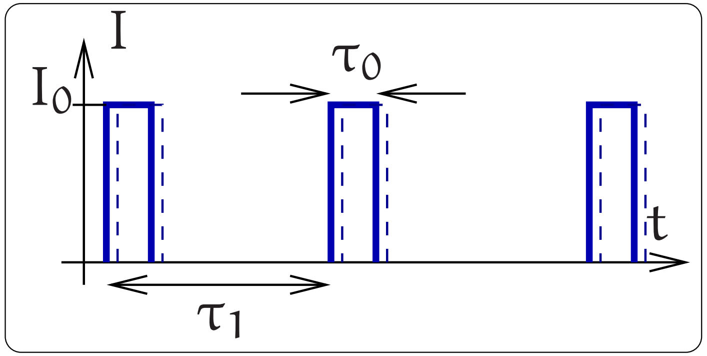
F — коэффициент шума усилителя (“s” – сигнал, “n” – шум (noise)).

Условно принято $T_{\text{вх}} = 300^\circ$ K .

Мазеры (СВЧ): $T_{\text{у}} = 6\ldots10^\circ$ K.

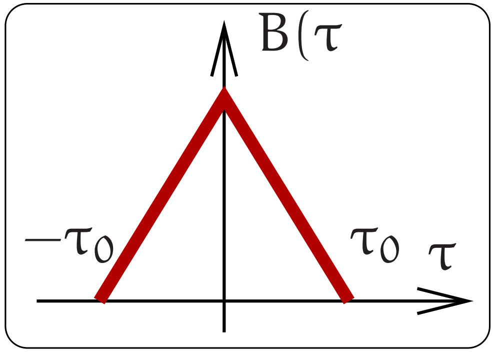
Усилитель на полевых транзисторах (FET): $T_{\text{у}} = 1^\circ$ K (очень хорошие, при физической $T = 4^\circ$ K).

Дробовой шум



$$I_0 = \frac{e}{\tau_0}, \quad \tau_0 \ll \tau_1$$
$$\bar{I} = \frac{e}{\tau_1}.$$

$$\overline{I(t)I(t-\tau)} = B(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} I(t)I(t-\tau)dt =$$
$$= \frac{1}{T} \times \frac{T}{\tau_1}\int_{-\tau_0}^{\tau_0} I(t)I(t-\tau)dt.$$



$$B(\tau) = \frac{I_0^2}{\tau_1}(\tau_0 - |\tau|), \quad \text{если } |\tau| < \tau_0,$$
$$B(\tau) = 0, \quad \text{если } |\tau| > \tau_0.$$

Нас интересуют частоты $\omega \ll 1/\tau_0$, поэтому можно считать, что

$$B(\tau) \quad \Rightarrow \delta(\tau) \times \int_{-t_0}^{t_0} B(\tau')\, d\tau' = \frac{I_0^2 \tau_0^2}{\tau_1}\, \delta(\tau) = \frac{e^2}{\tau_1}\, \delta(\tau)$$

Рассчитываем спектральную плотность:

$$S_{\text{др}}(\omega) \quad = \quad 4\int_0^{\infty} B(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau = 4 \times \frac{1}{2} \times e \times \frac{e}{\tau_1} = 2e\bar{I},$$

$$\Delta I^2 \quad = \quad S_{\text{др}}(\omega) \cdot \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 2e\bar{I}\,\Delta f.$$

Это есть **теорема Шоттки:** $\boldsymbol{S_{\text{др}}(\omega) = 2e\bar{I}}$

Условия вывода теоремы Шоттки:

- Малое время τ_0 “импульса тока” — $\omega\tau_0 \ll 1$.

  Если $\omega\tau_0 \geq 1$, то $S_{\text{др}}(\omega)$ меньше (!).

- Нет корреляции между зарядами.

  (На самом деле из-за кулоновского отталкивания есть депрессия дробового шума).

- Нет сгустков зарядов.

  (На самом деле есть — спектральная плотность $S_{\text{др}}(\omega)$ растет на низких частотах).

Обобщенная формула теоремы Шоттки:

$$S_{\text{др}} = \beta(\mathbf{f})\,\Gamma \times 2e\bar{I}\,, \quad \beta(\mathbf{f}) = \frac{1}{f^{\alpha}}, \quad \alpha \simeq 1 \quad f < 10^3\text{Гц},$$

$$\beta(\mathbf{f}) \simeq 0.5 \quad \text{при} \quad f \simeq 1/\tau_0, \qquad \mathbf{0.05} < \Gamma \leq \mathbf{1}.$$