

Генерирование электрических колебаний

Коэффициент усиления с обратной связью:

$$K_{\beta} = \frac{K}{1 - \beta K}$$

K и β — комплексные величины.

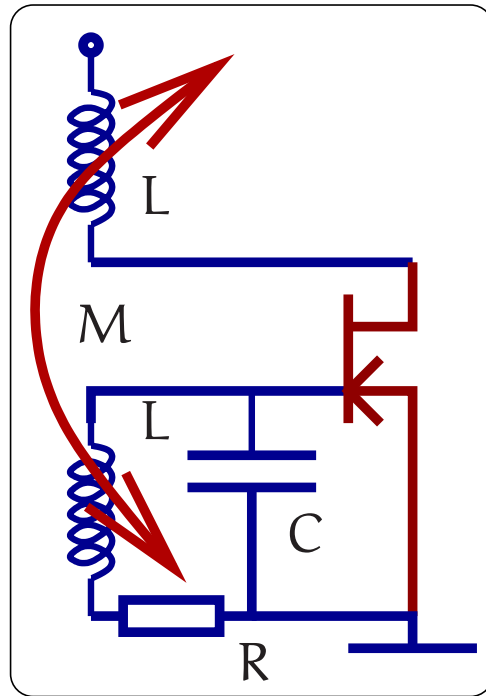
Условия самовозбуждения:

баланс амплитуд: $|K| |\beta| = 1,$ (1)

баланс фаз: $\varphi_K + \varphi_{\beta} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2 \dots$ (2)

Баланс амплитуд (1) и баланс фаз (2):

“выживают” только те колебания, у которых баланс есть.



Простейший генератор

q — заряд на конденсаторе C :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = M \frac{dI_{СИ}}{dt},$$

В лин. прибл.: $I_{СИ} = S U_{ЗИ} = Sq/C$,

$$L\ddot{q} + \left(R - \frac{MS}{C} \right) \dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

В линейном приближении:

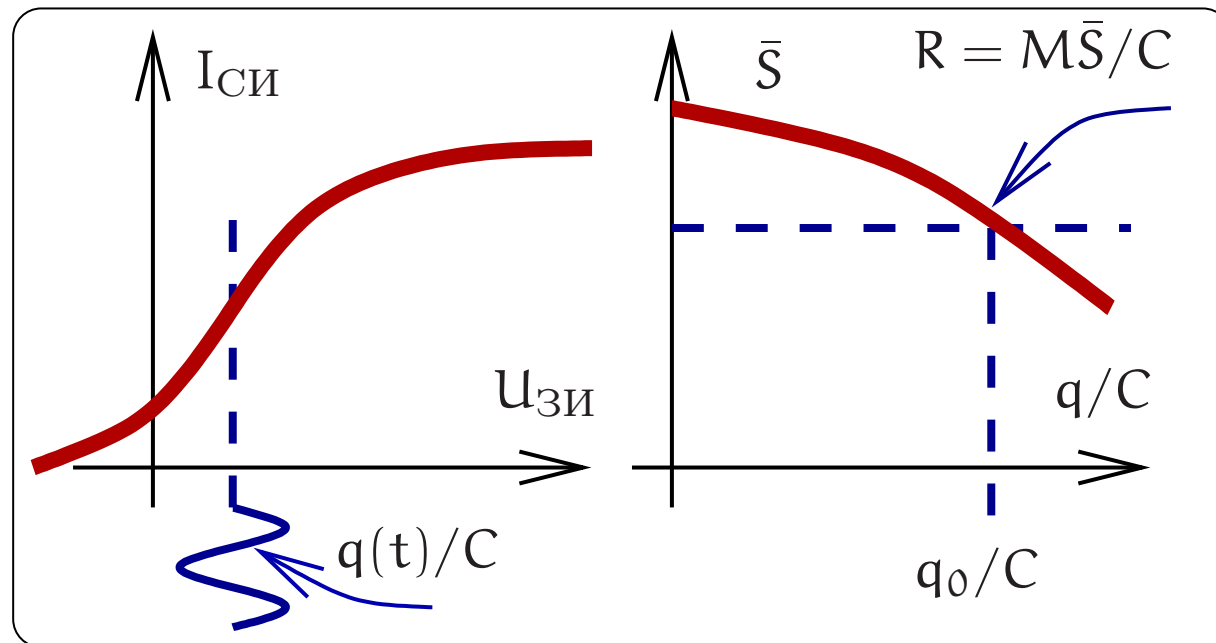
$$q(t) = q_0 \exp\left(-\left[R - \frac{MS}{C}\right] \frac{t}{L}\right) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Это корректно, если $\left[R - \frac{MS}{C}\right] / L \ll \frac{\omega_0}{2\pi}$, $\omega_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

В общем случае: $S(q, U_{\pm})$ — **нелинейная** функция.

Учтем нелинейную зависимость $S(q)$.

Мягкий режим возбуждения

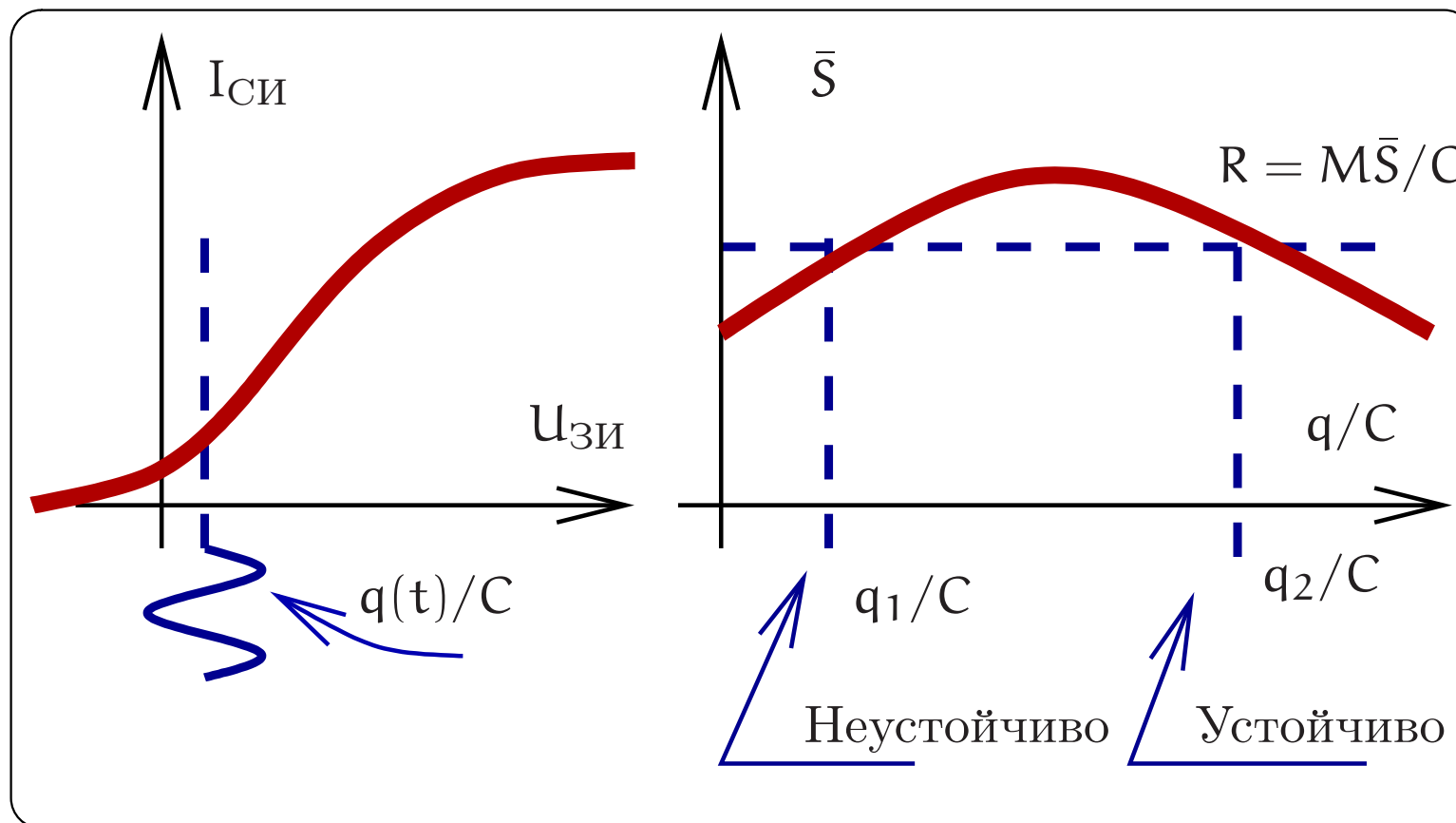


Автоколебания возникают от нуля (!)

Можно считать $\bar{S} = S_0 - S_1 q^2$, (усреднение по $q = cU_{зи}$)

$q(t) = q_0 \cos \omega t$.

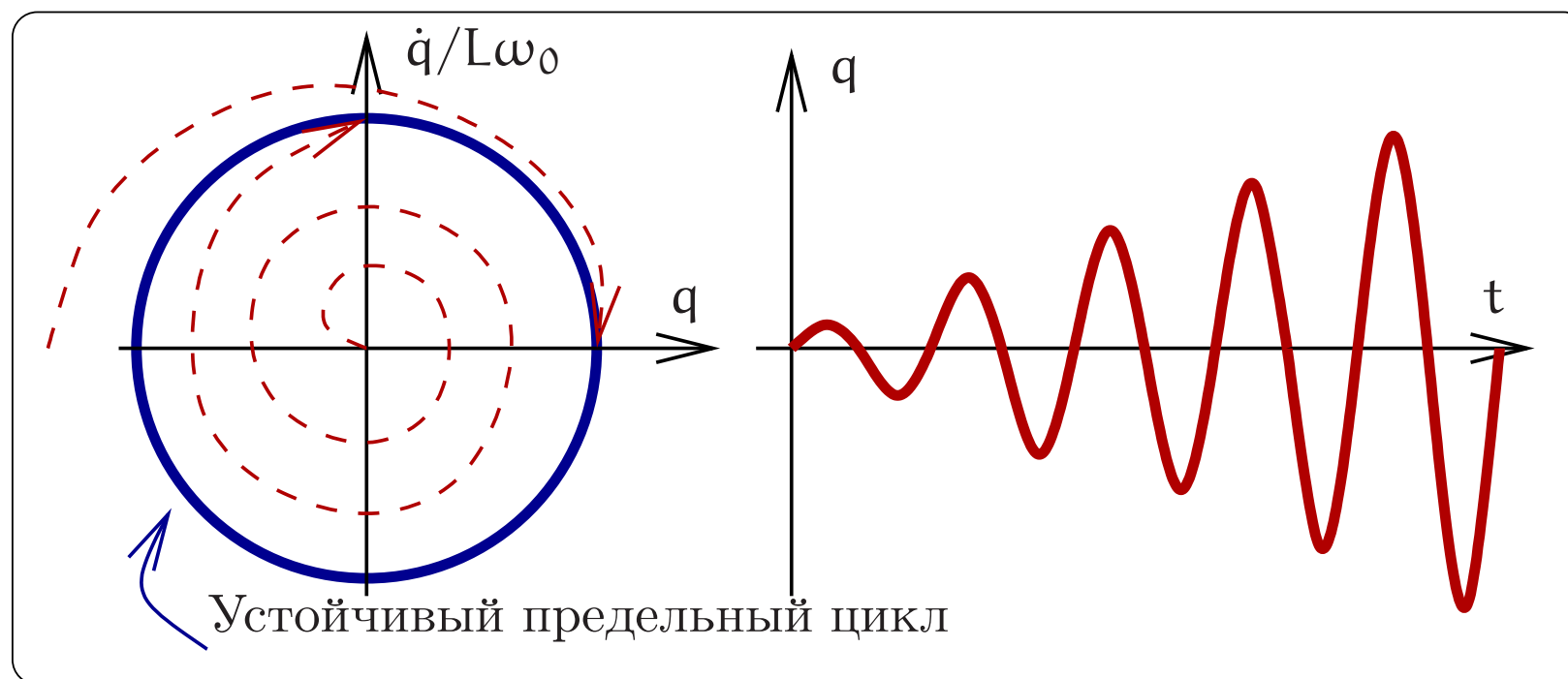
Жесткий режим



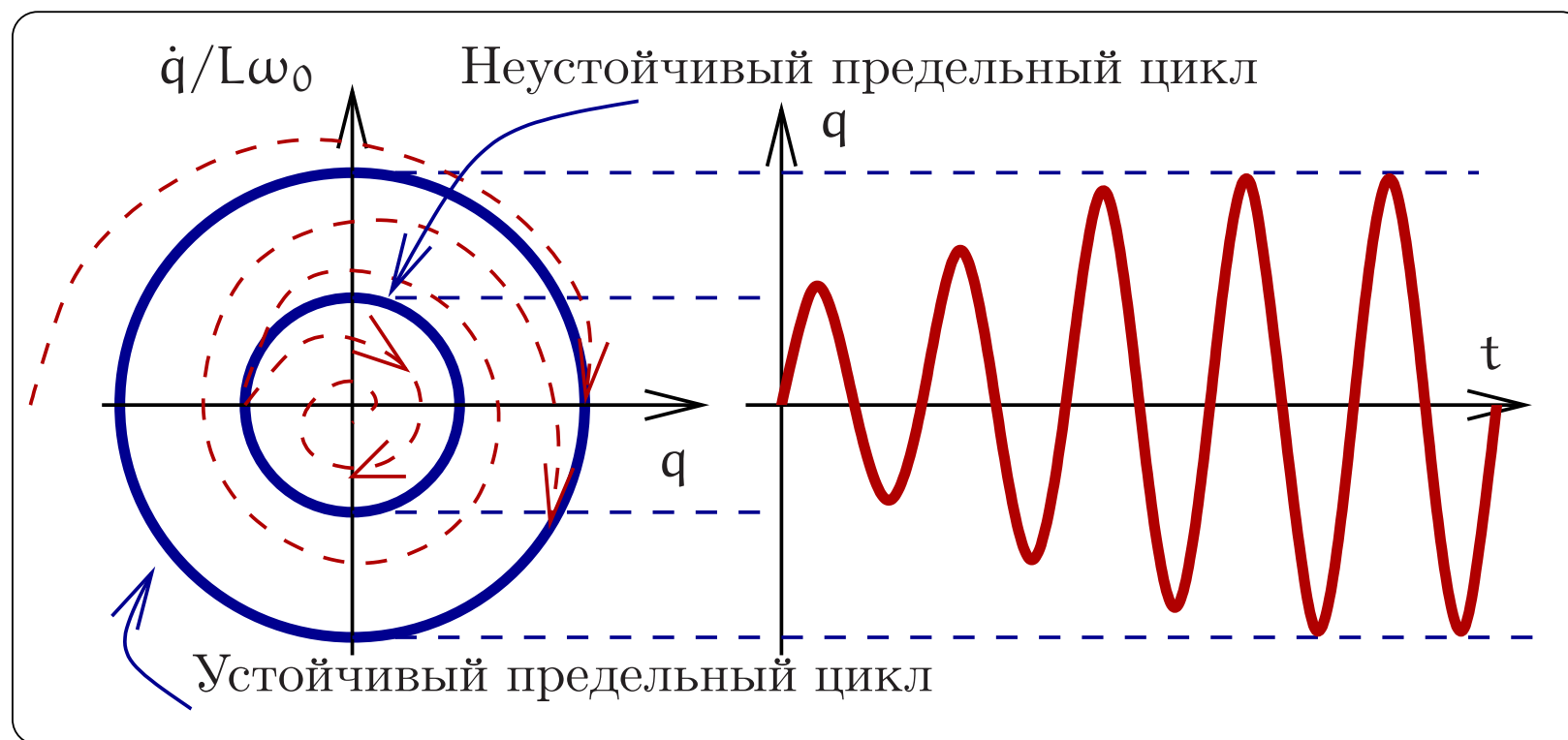
Автоколебания НЕ возникают от нуля.

Сердце — жесткий режим.

Мягкий режим на фазовой плоскости:

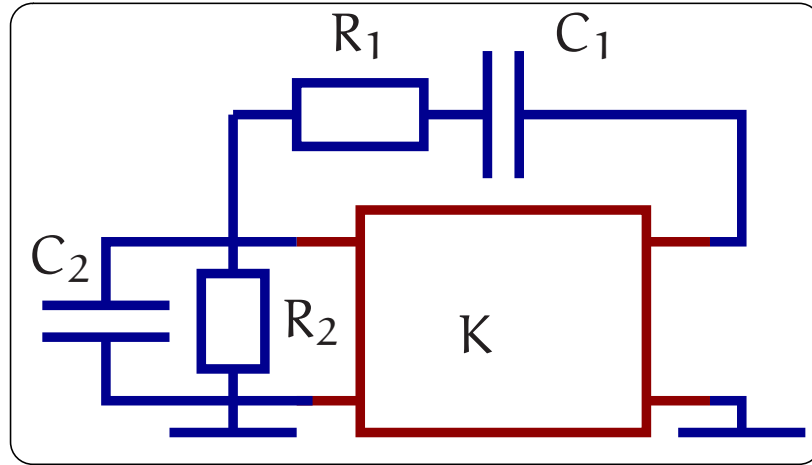


Жесткий режим на фазовой плоскости:



RC-генераторы

(**НЕ**инвертирующий усилитель)



$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1},$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + i\omega C_2 R_2}$$

$$\beta = \frac{R_2}{(1 + i\omega C_2 R_2)[R_1 + 1/(i\omega C_1)] + R_2}$$

$$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + \frac{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{i\omega C_1 R_2},$$

Пусть $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \Rightarrow \beta(\omega_0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}.$

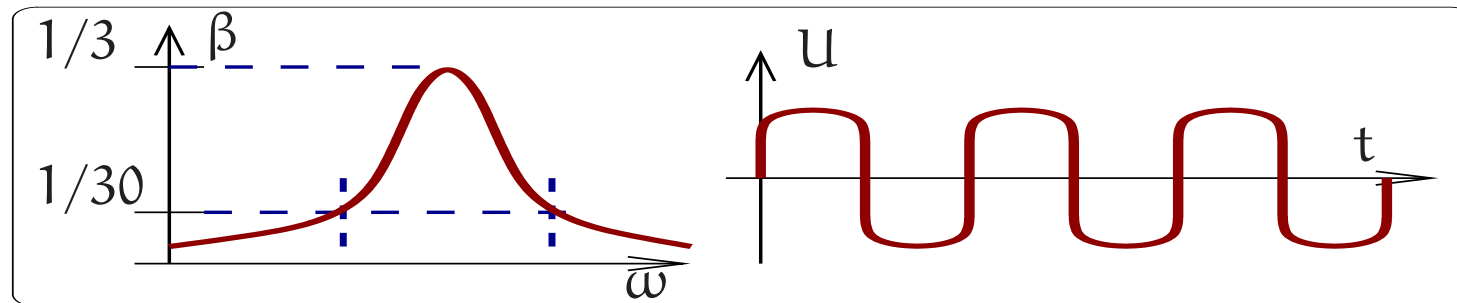
$$\text{Пусть } \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \Rightarrow \beta(\omega_0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}.$$

$$\text{Пусть } R_1 = R_2, \quad C_1 = C_2 \Rightarrow \beta(\omega_0) = \frac{1}{3},$$

$$K_\beta = \frac{K}{1 - K\beta}, \quad \text{Условие генерации: } K(\omega_0) = \frac{1}{\beta(\omega_0)} = 3$$

Если $K \geq 3$ и $\arg(K) = 2\pi$ — синусоидальные колебания.

Если K больше, например, $K = 30$ — релаксационные (разрывные) колебания, т.к. условия возбуждения выполняются для широкой полосы частот.



Стабилизация частоты автогенератора

Почему $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$? как сделать $\frac{d\omega}{dt} \rightarrow 0$?

Причины нестабильности частоты:

1. Технические (долговременная нестабильность)
 - (a) Нестабильность температуры контура.
 - (b) Старение.
 - (c) Дрейфы различных параметров.
2. Флуктуационные (кратковременная нестабильность)
 - (a) Тепловые.
 - (b) Дробовые (если есть).
 - (c) Квантовые.

Техническая нестабильность частоты

1 (а). $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \alpha_{\text{т.к.ч.}} \Delta T$, $\alpha_{\text{т.к.ч.}} = \frac{d\omega_0}{\omega_0 dT}$ — температурный коэффициент частоты (т.к.ч.).

В обычном случае т.к.ч. $\simeq \alpha_T$ — линейный коэффициент теплового расширения.

Пример: $\alpha_T \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}^\circ$, $T = 300 \text{ K}^\circ \Rightarrow$

$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 2 \cdot 10^{-5} \times 5 \cdot 10^{-3} \simeq 10^{-7}$ — обычный результат.

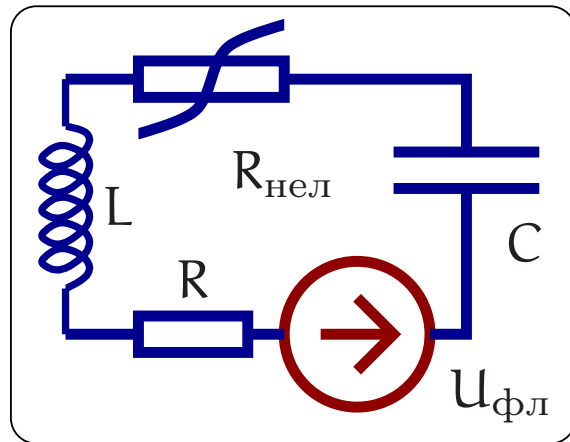
Кварцевый генератор (кристалл SiO_2 заполняет емкость LC-генератора, пьезоэффект):

$\alpha_{\text{т.к.ч.}} \simeq 10^{-8} \text{ 1/K}^\circ \Rightarrow \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 1 \cdot 10^{-10}$ за 1 сек.

$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 1 \cdot 10^{-7}$ за год (старение).

1 (б) и (в) — нет теории, есть эмпирические результаты. Любое физическое (и количественное!) понимание механизмов старения и дрейфов приводит к уменьшению нестабильности.

Флуктуационная нестабильность частоты автогенератора



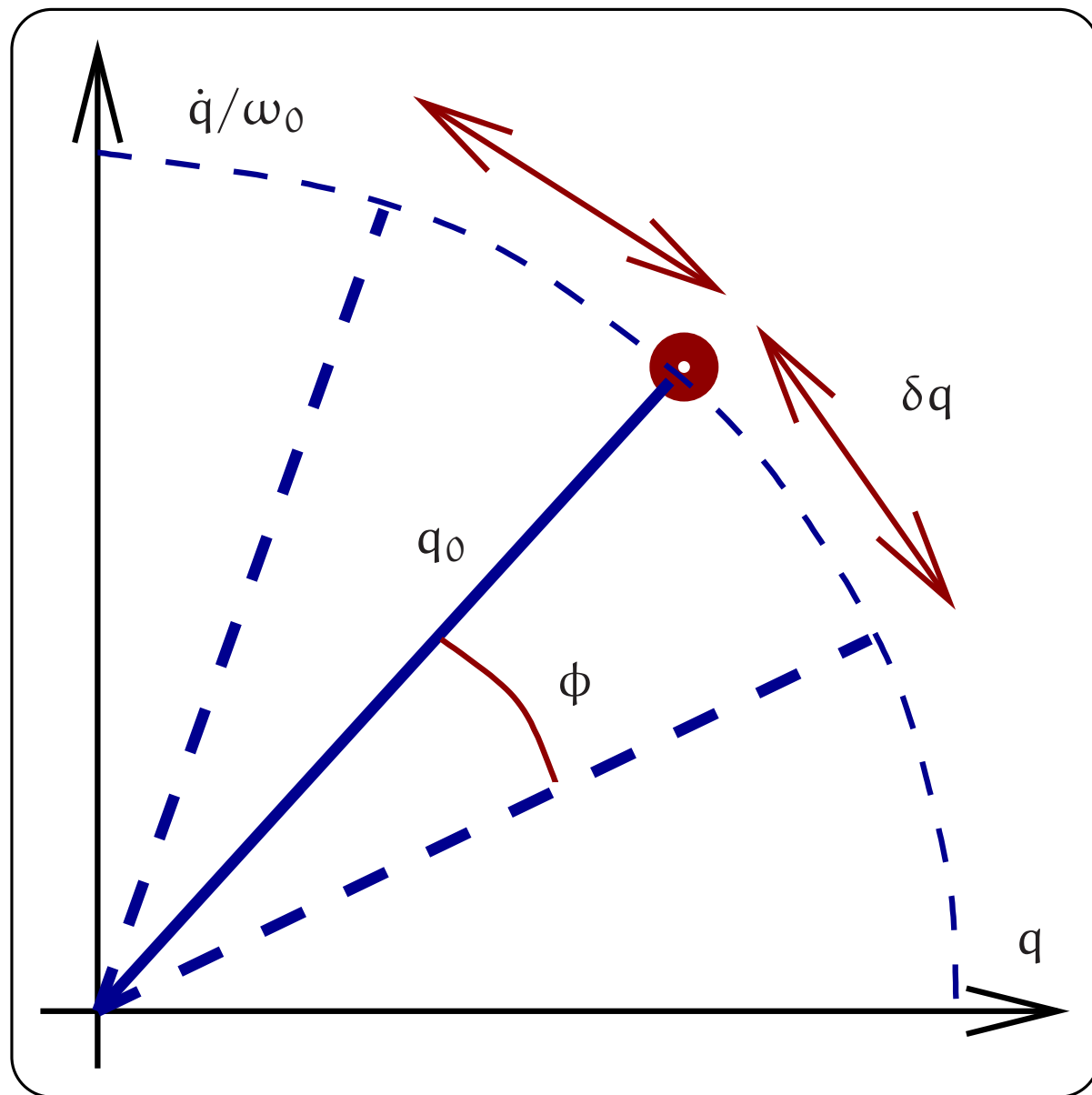
Уравнение для заряда q :

$$L\ddot{q} + \underbrace{(R + R_{\text{нел}})}_{\text{в среднем } = 0} \dot{q} + \frac{q}{C} = U_{\text{фл}}$$

Амплитуда определяется нелинейностью. В общем виде:

$$\begin{aligned} q(t) &= (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t + \Delta\varphi) \simeq \\ &\simeq (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t) - q_0 \Delta\varphi \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Пренебрежем нелинейностью и оценим Δq и $\Delta\varphi$ в линейном приближении.



Напоминание:

$$L\ddot{\delta q} + \frac{\delta q}{C} = U_0 \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \delta q = \frac{U_0 t}{2\omega_0 L} \sin \omega_0 t$$

Заменим

$$U_0 = \sqrt{\frac{4kTR}{t_0}}, \quad \omega_0 t_0 \gg 1, \quad \text{но } t \gg t_0$$

Тогда изменение заряда за время t_0 :

$$\delta q_T = q_0 \Delta\varphi \simeq \frac{\sqrt{4kTRt_0}}{2L\omega_0}$$

Если $t \gg t_0$, то вариации δq_T складываются независимо:

$$\Delta q_T \simeq \frac{\sqrt{4kTRt_0}}{2L\omega_0} \times \sqrt{\frac{t}{t_0}} = \frac{\sqrt{kTRt}}{L\omega_0},$$

$$\Delta\varphi_T \simeq \frac{\Delta q_T}{q_0} = \frac{\sqrt{\kappa T R t}}{L\omega_0} \times \frac{1}{q_0} = \frac{\sqrt{\kappa T t L\omega_0/Q}}{Lq_0\omega_0},$$

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{\omega_0^2 q_0^2 R}{2} \Rightarrow q_0^2 = \frac{2W}{\omega_0^2 R} = \frac{2W}{\omega_0^2} \times \frac{Q}{\omega_0 L},$$

$$(\Delta\varphi_T)^2 = \frac{\kappa T t}{L\omega_0 Q} \times \frac{\omega_0^2}{2W} \times \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{\kappa T \omega_0^2 t}{2Q^2 W} = Dt,$$

$$(\Delta\varphi_T)^2 = Dt, \quad \mathbf{D} = \frac{\kappa T \omega_0^2}{2Q^2 W}$$

D — коэффициент диффузии фазы (фаза “гуляет” как броуновская частица). Введем время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ и длину когерентности $L_{\text{ког}}$:

$$(\Delta\varphi_T)^2 = \pi^2 = D\tau_{\text{ког}}, \quad L_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}.$$

Естественная ширина линии

Получим формулу для относительной естественной ширины линии $\Delta\omega_T/\omega_0$ автогенератора

$$\Delta\omega_T \simeq \frac{\Delta\varphi_T}{t}, \quad \frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \frac{\Delta\varphi_T}{\omega_0 t}.$$

$$\frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \sqrt{\frac{kT}{2Q^2Wt}}, \quad \text{при } T \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2Q^2Wt}}$$

Последняя — формула Таунса. Это точные формулы и они получены с учетом только *одного* источника — тепловых флуктуаций.

(Всегда есть и другие источники).

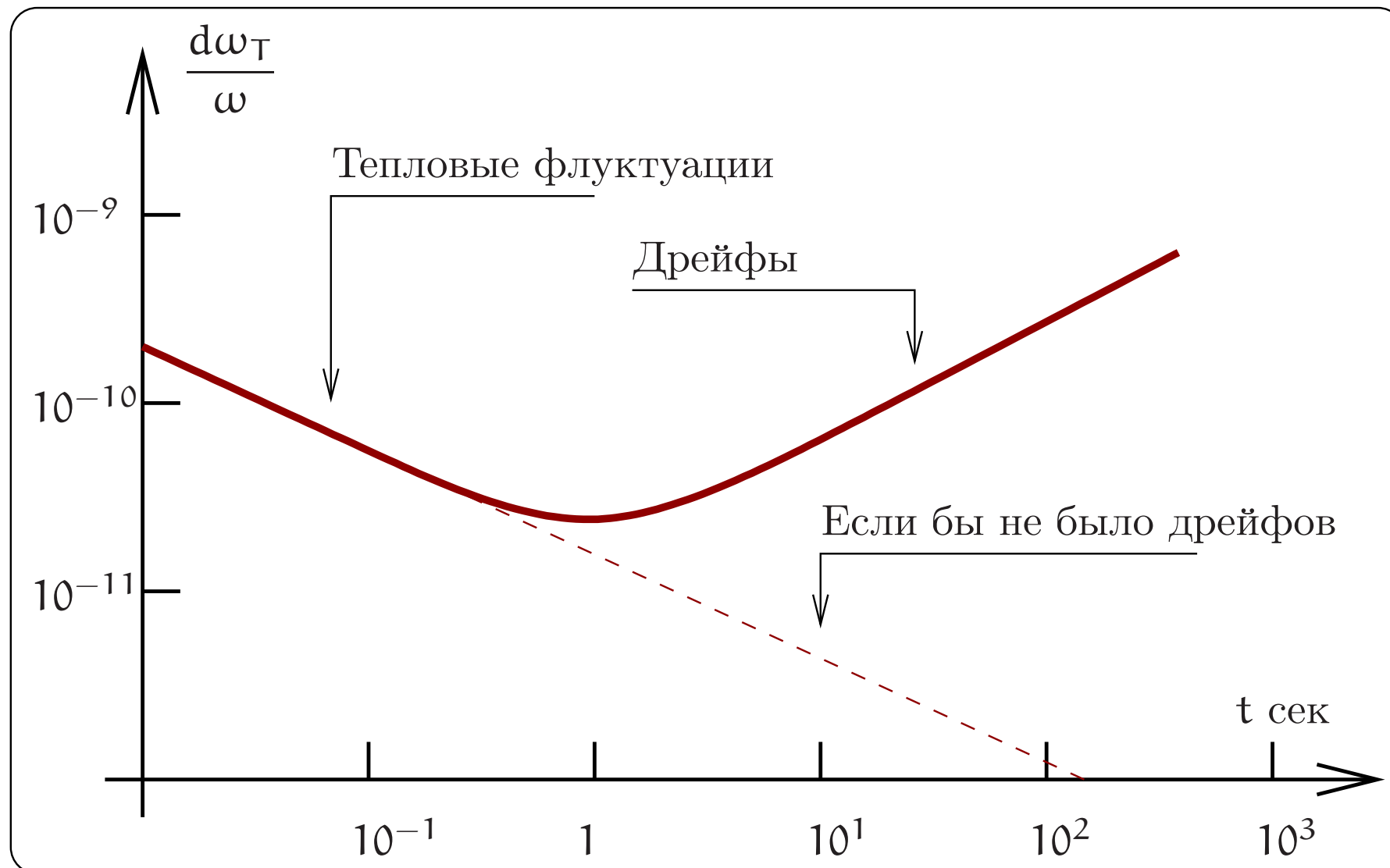
Пример:

Пусть $Q = 10^2$, $W = 1 \text{ mW}$, $T = 300 \text{ K}^\circ$, $t = 1 \text{ сек}$,
 $\omega_0 = 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Тогда

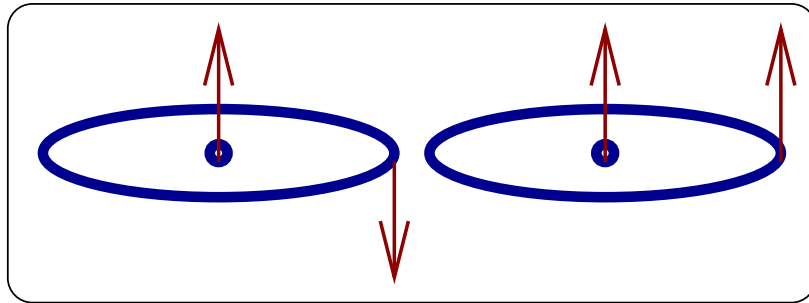
$$\begin{aligned}\Delta\omega_T/\omega_0 &\simeq 1.4 \cdot 10^{-11}, \\ \tau_{\text{КОГ}} &\simeq 5 \cdot 10^8 \text{ сек}, \\ L_{\text{КОГ}} &\simeq 1.5 \cdot 10^{17} \text{ м}.\end{aligned}$$

Кварцевый генератор:

$Q \simeq 10^7$, $\Rightarrow \Delta\omega_T/\omega_0 \simeq 1/4 \cdot 10^{-16}$ (за 1 сек).

Пример для кварцевого генератора

Водородный стандарт



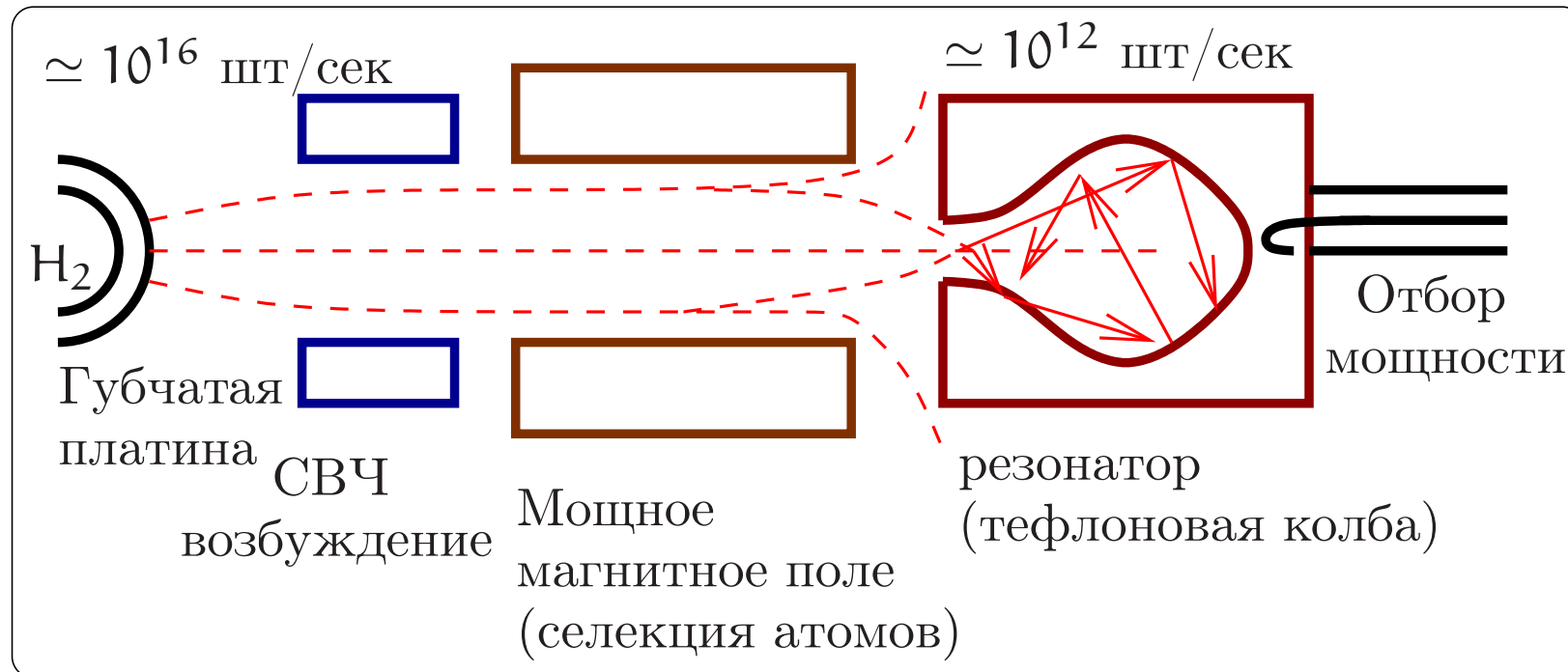
$$f_{00} = 1\,420\,405\,751,786 \pm 0,004 \text{ Гц}$$

Уровень воспроизведения (метрологическая точность):

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq 3 \cdot 10^{-13}$$

Мазерный эффект: **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation = MASER.

Принципиальная схема водородного мазера



Мощность водородного мазера:

$$W \simeq 10^{12} \times 2\pi\hbar f_{00} \simeq 10^{-12} \text{ Вт},$$

Технические уходы водородного мазера:

$$\Delta\nu \simeq 7 \cdot 10^{-3} \text{ Гс} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 3 \cdot 10^{-12}$$

$$\Delta T_{\text{пучка}} \simeq 1 \text{ К}^\circ \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 1.5 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{Достижение: } \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 3 \cdot 10^{-16} \text{ за 3 часа}$$

Примерно столько же дают СВЧ автогенераторы, стабилизированные СПР. Цель на 4-5 лет:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 10^{-17} \dots 10^{-18} (!)$$

Опыт R. Vessot (18.04.1976)

Водородный стандарт на борту спутника. Ход этих “часов” сверяется с ходом “часов” на земле. Измерена релятивистская разница хода часов на борту и на Земле.

$$\left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\text{Rel}} = \frac{\Delta\Phi_{\text{grav}}}{c^2} \simeq 7 \times 10^{-10} \Big|_{H=10^4 \text{ km}}$$

$$\text{H-maser: } \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 2 \times 10^{-15} \text{ за 1 час,}$$

$$\text{Экперимент: } \left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\text{Rel}} = \frac{\Delta\Phi_{\text{grav}}}{c^2} (1 \pm 2 \cdot 10^{-4}).$$

Стандарт на одиночных ионах ртути $^{199}\text{Hg}^+$

Предельная нестабильность частоты (дисперсия Аллана):

$$\sigma(\tau) \simeq \left\langle \frac{\Delta\nu_{\text{rms}}}{\nu_0} \right\rangle \simeq \frac{\Delta\nu}{\pi\nu_0} \sqrt{\frac{T}{N\tau}}$$

$\Delta\nu$, ν_0 — ширина и частота атомного перехода, T — время циклов (т.е. время определения центра линии), N — число атомов, τ — время наблюдения.

Для одиночного иона ртути $^{199}\text{Hg}^+$ предел должен быть около

$$\left\langle \frac{\Delta\nu_{\text{rms}}}{\nu_0} \right\rangle \simeq 1 \times 10^{-15} \times \sqrt{\frac{1}{\tau}}$$

Экспериментально получено:

$$\left\langle \frac{\Delta\nu_{\text{rms}}}{\nu_0} \right\rangle \simeq 7 \times 10^{-15} \times \sqrt{\frac{1}{\tau}}$$

Ртутный стандарт использует следующие достижения

1. Глубокое лазерное охлаждение атомов и ионов.
2. Методы частотной стабилизации лазеров: ширина линии $\simeq 0.2$ Гц.
3. Методы переноса частоты из оптического диапазона в СВЧ диапазон.

Частота непрерывного лазера удваивается и привязывается к переходу одиночного и охлажденного иона $^{199}\text{Hg}^+$ (лежащем в УФ области).

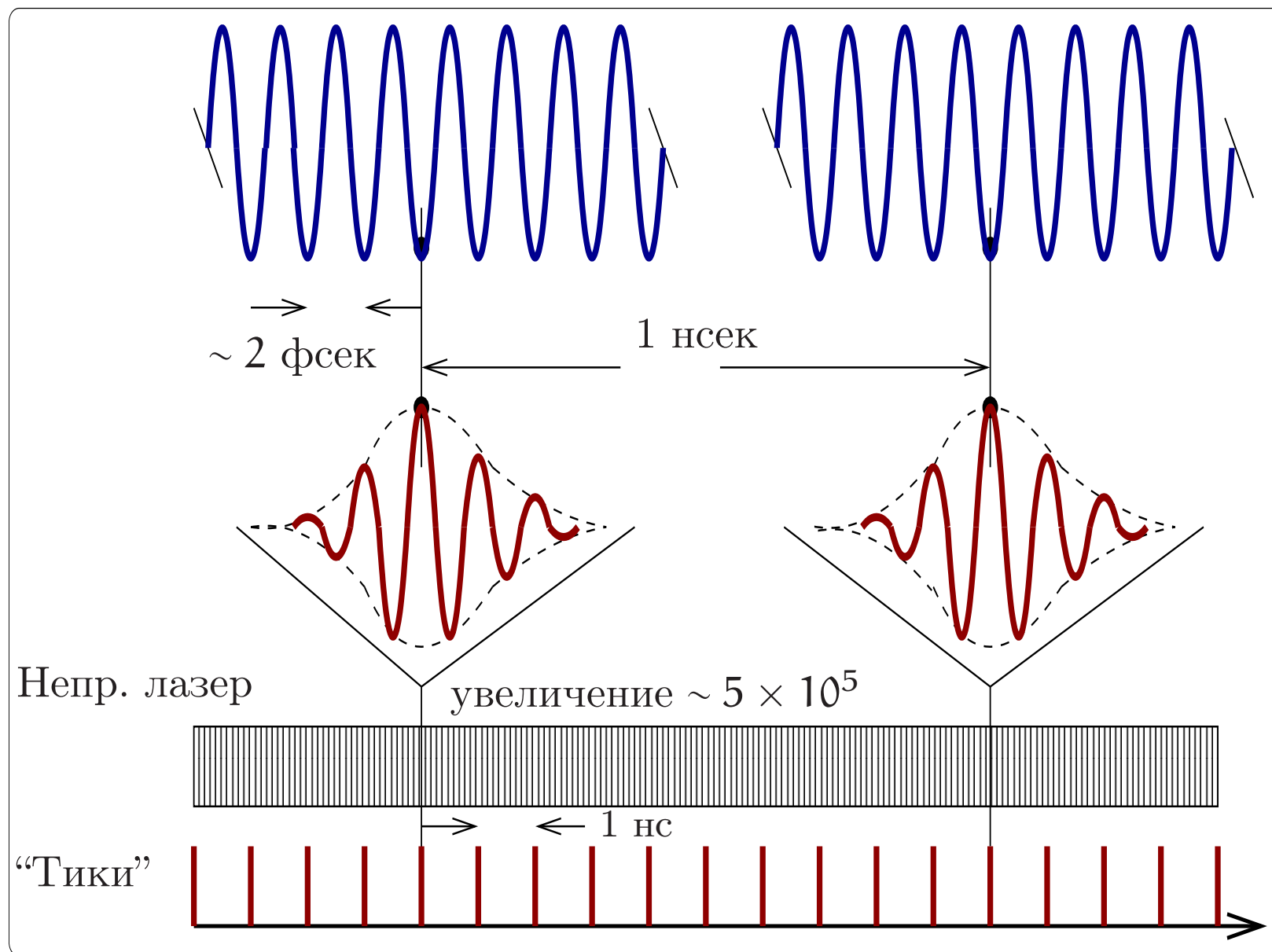
Используется лазер на красителях непрерывного излучения (CW) с длиной волны $\lambda \simeq 563$ nm и мощностью $W \simeq 200$ mW.

Его частота удваивается и привязывается к частоте УФ перехода $^{199}\text{Hg}^+ \ ^2S_{1/2} \rightarrow \ ^2D_{1/2}$ одиночного иона $^{199}\text{Hg}^+$ (длина волны $\lambda \simeq 282$ nm, естественная ширина линии 2 Гц).

Коротковременная (1 – 10 сек) нестабильность частоты такого лазера $\Delta\omega/\omega \leq 5 \times 10^{-15}$ ($\Delta\omega/\omega \sim \tau^{-1/2}$).

Как теперь получить “тики” ?

Частота CW лазера понижается до диапазона 10^9 Гц=1 ГГц путем связи с импульсным титан-сапфировым (Ti:sapphire) фемто-секундным (ФС) лазером и специальным “фононно-кристаллическим” волноводом (волновод с искусственной периодичностью). ФС лазер выдает импульсы светового излучения длины $\tau_{\text{imp}} \sim 25$ фсек с периодичностью около $\tau_r \simeq 10^{-9}$ сек.



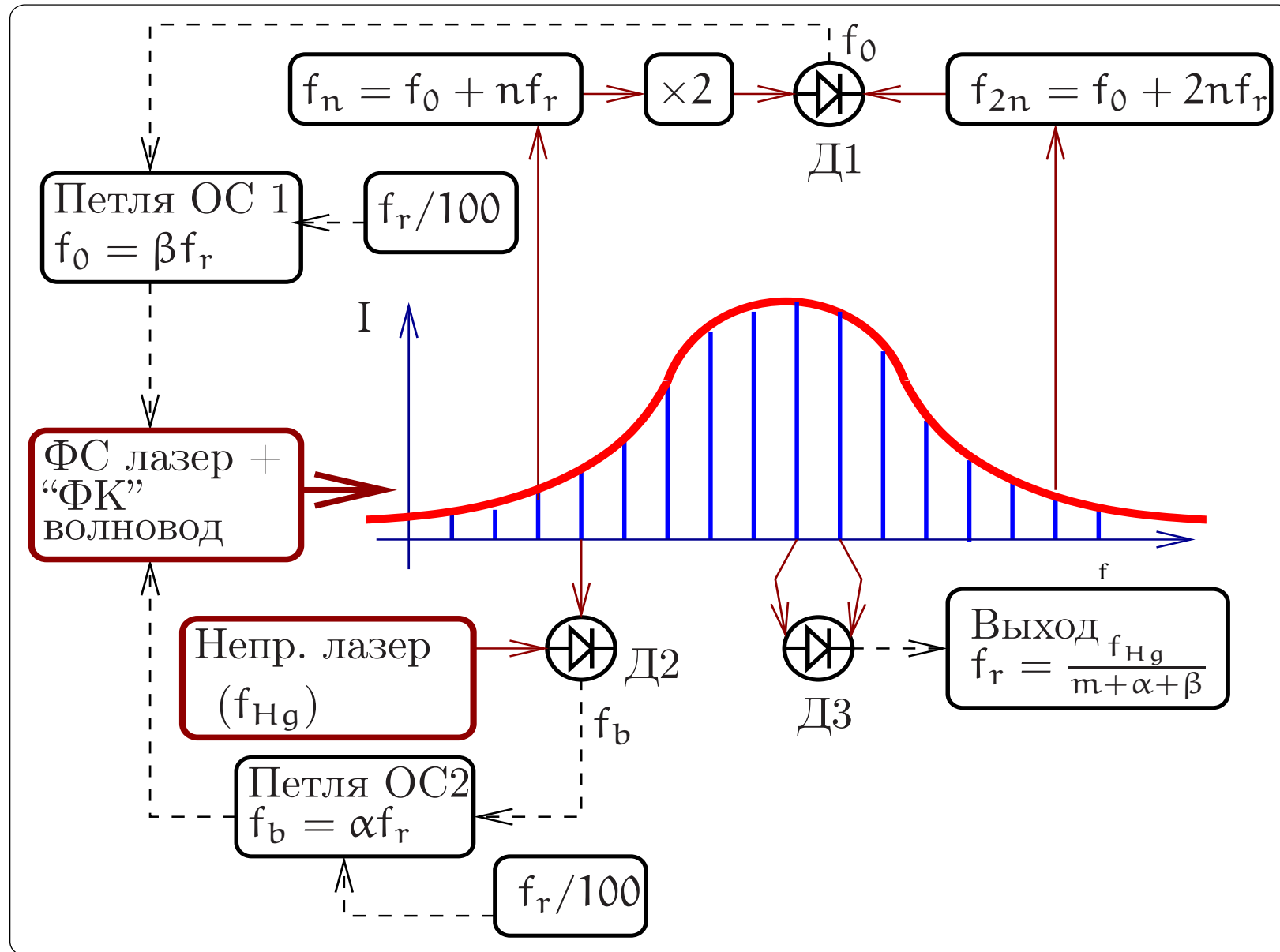
Фемто-секундный лазер

Спектр фемто-секундного лазера — гребенка линий:

$$f_n = f_0 + n f_r, \quad f_r = 1/\tau_r$$

(f_0 — возникает из-за разницы групповой и фазовой скорости в резонаторе лазера). Важно, что:

- Спектр покрывает почти октаву.
- Практически отсутствует дисперсия групповой скорости в “фотон-кристаллическом (ФК)” волноводе.



Детектор Д1 измеряет f_0 . Детектор Д2 измеряет f_b . Через петли обратной связи сигналы с детекторов подаются на ФС лазер модулируя выходную мощность и длину резонатора. Цепи обратной связи поддерживают следующие соотношения:

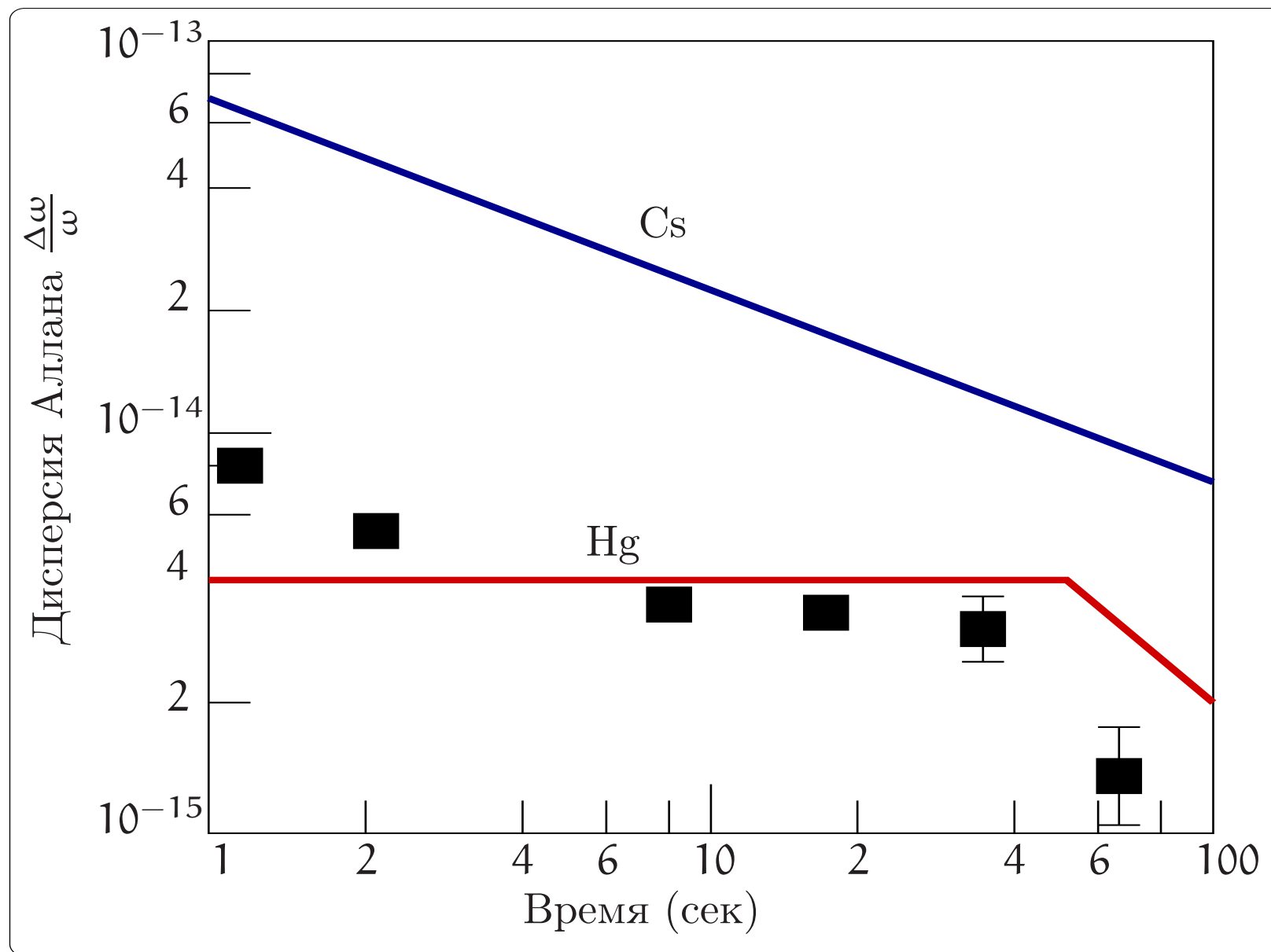
$$f_0 \Rightarrow \beta f_r, \quad \beta = \frac{1}{100}, \quad (3)$$

$$f_b \equiv f_{Hg} - f_0 - mf_r \Rightarrow \alpha f_r, \quad \alpha = \frac{1}{100} \quad (4)$$

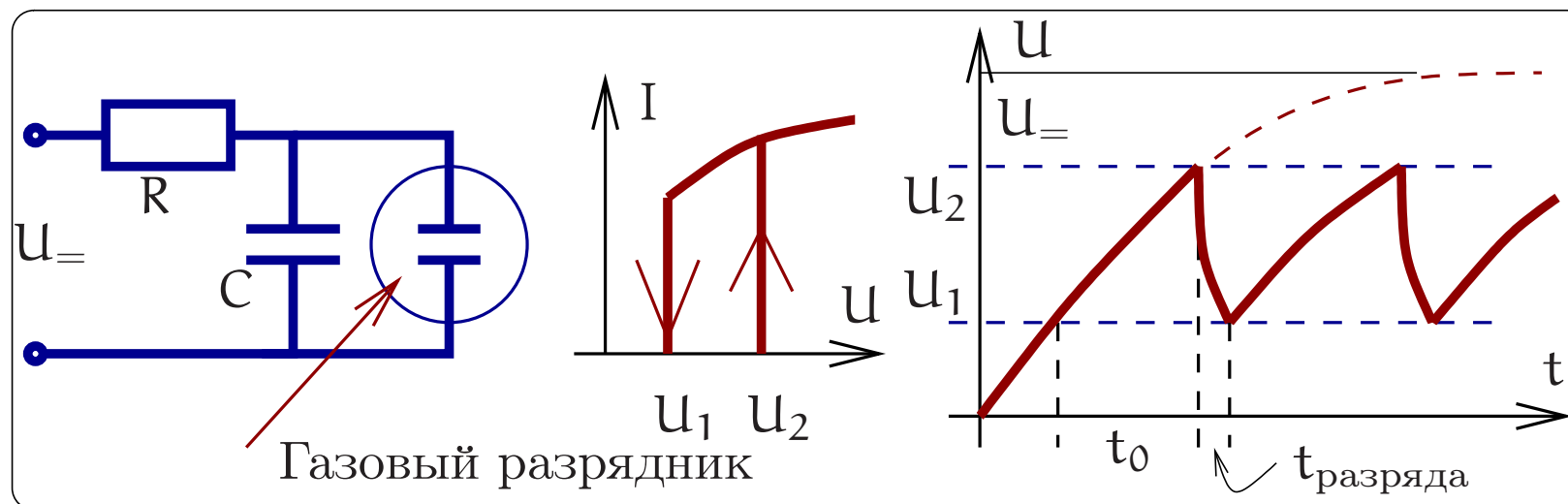
Детектор Д3 выдает на выход частоту "тиков"

$$f_r = \frac{Hg}{m \pm \alpha \pm \beta} \quad (5)$$

Если $\alpha = -\beta$, то выходная частота является просто субгармоникой f_{Hg}



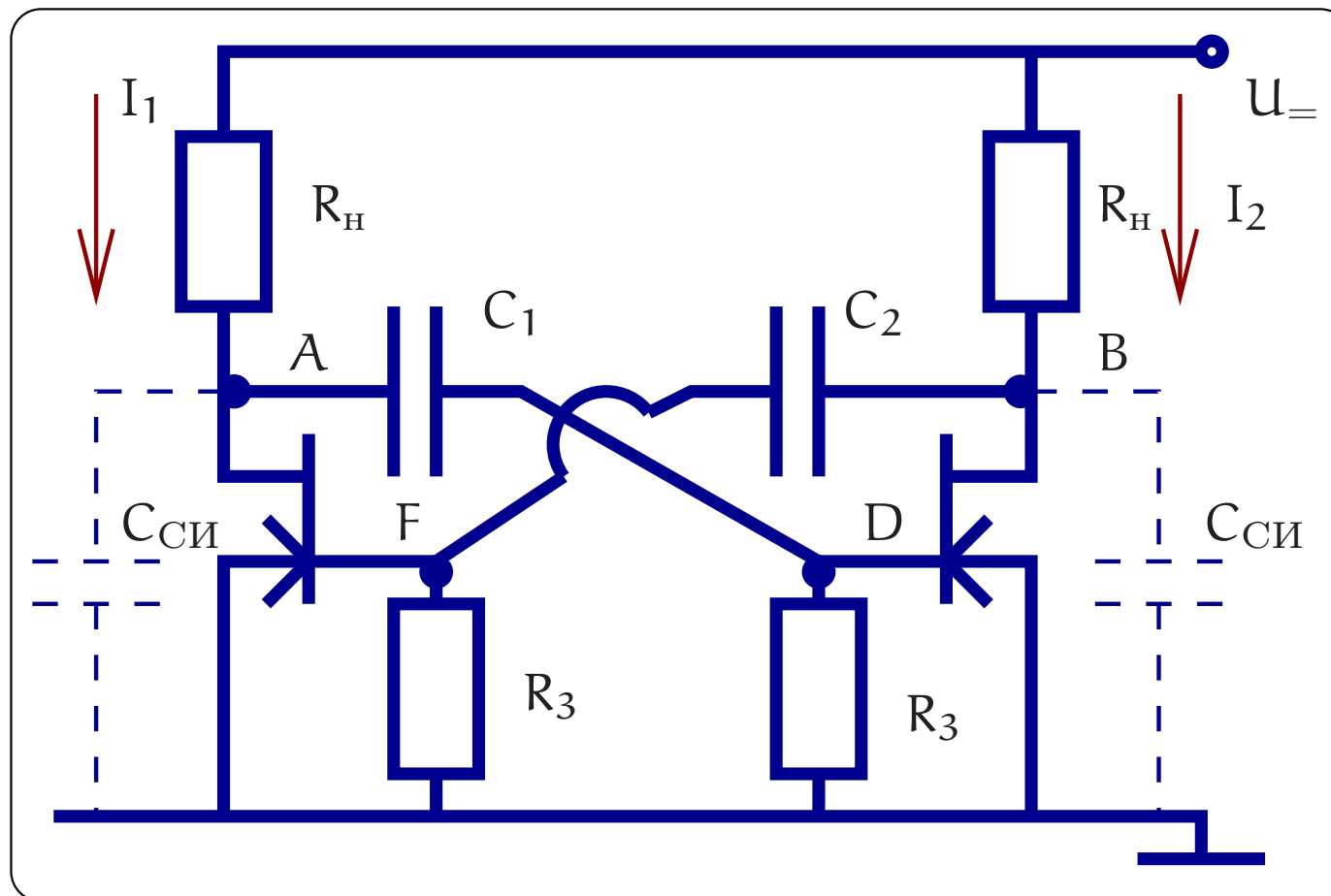
Простейший генератор релаксационных колебаний



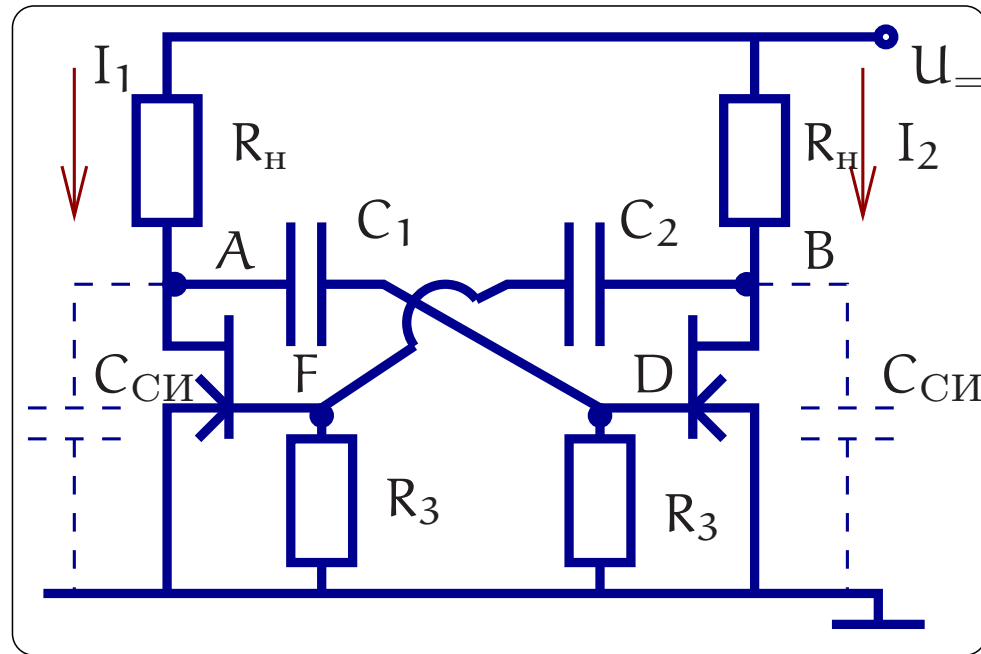
$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/RC} \right) \Rightarrow \frac{U_0 t_0}{RC} \simeq U_2 - U_1,$$

$$T = t_0 + t_{\text{разряда}} \simeq \frac{U_2 - U_1}{U_0} \times RC + t_{\text{разряда}}$$

Симметричный мультивибратор



Для обычных параметров R_H , C_1 , C_2 , R_3 , условие возбуждения “перевыполнено”: $K_\beta = K_1 K_2 \gg 1$



Обычно еще выполнено условие

$$R_H C_{СИ} \ll C_{1,2} R_3$$

Пусть токи через транзисторы равны.

Пусть из-за флуктуаций I_1 возрос на $+\Delta I_{10}$. Тогда:

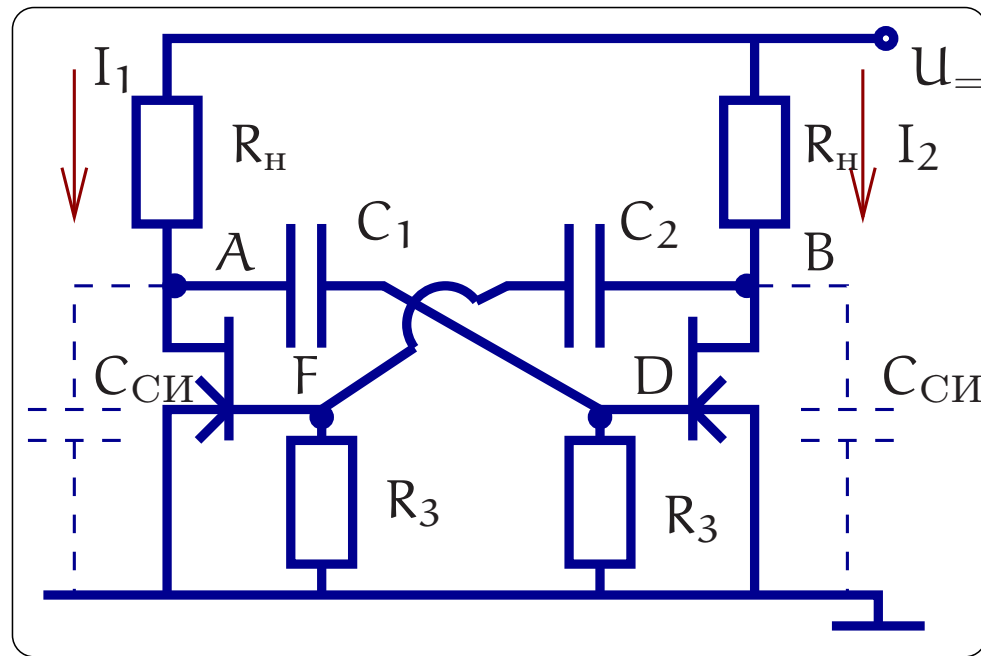
$$\Delta U_A = -\Delta I_{10} R_H, \quad \Delta U_{C_1} \simeq 0,$$

$$\delta U_D = -\Delta I_{10} R_H \Rightarrow \Delta U_B = -K \delta U_D = +K \Delta I_{10} R_H,$$

$$\Delta U_{C_2} \simeq 0 \Rightarrow \Delta U_F = \Delta U_B,$$

$$\Rightarrow \Delta I_1 = +SK \Delta U_B = SR_H K^2 \Delta I_{10} \gg \Delta I_{10} \quad \text{т.е. } \mathbf{\text{неустойчивость!}}$$

Лавинный процесс: $\tau_{\text{front}} \simeq R_H C_{СИ} \simeq 10^3 \times 10^{-11} = 10^{-8}$ сек.

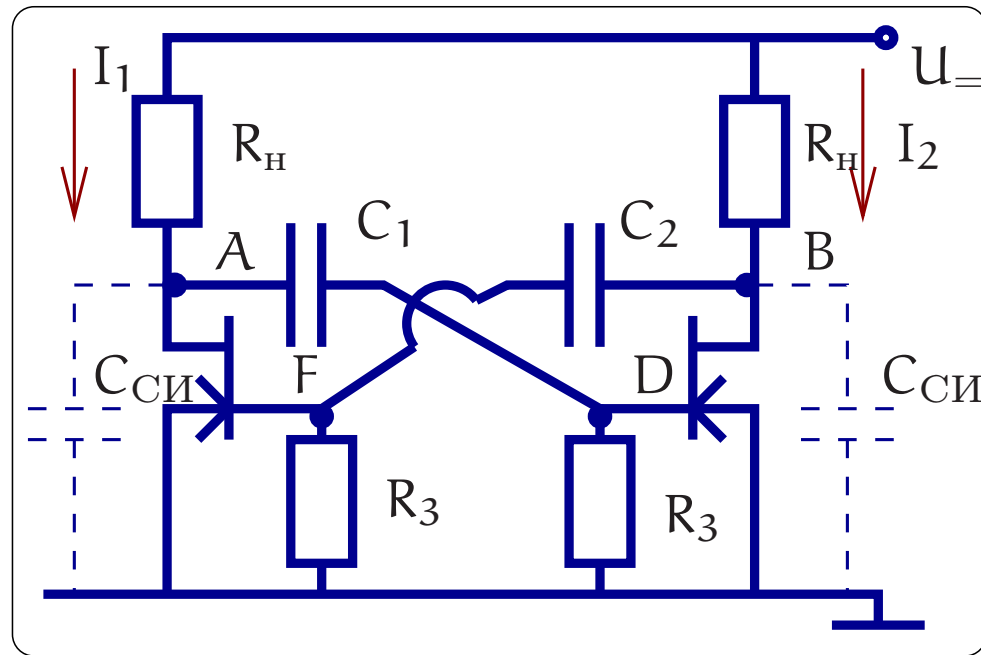


Лавинный процесс:

$$\tau_{\text{front}} \simeq R_H C_{\text{СИ}} \simeq 10^3 \times 10^{-11} = 10^{-8} \text{ сек.}$$

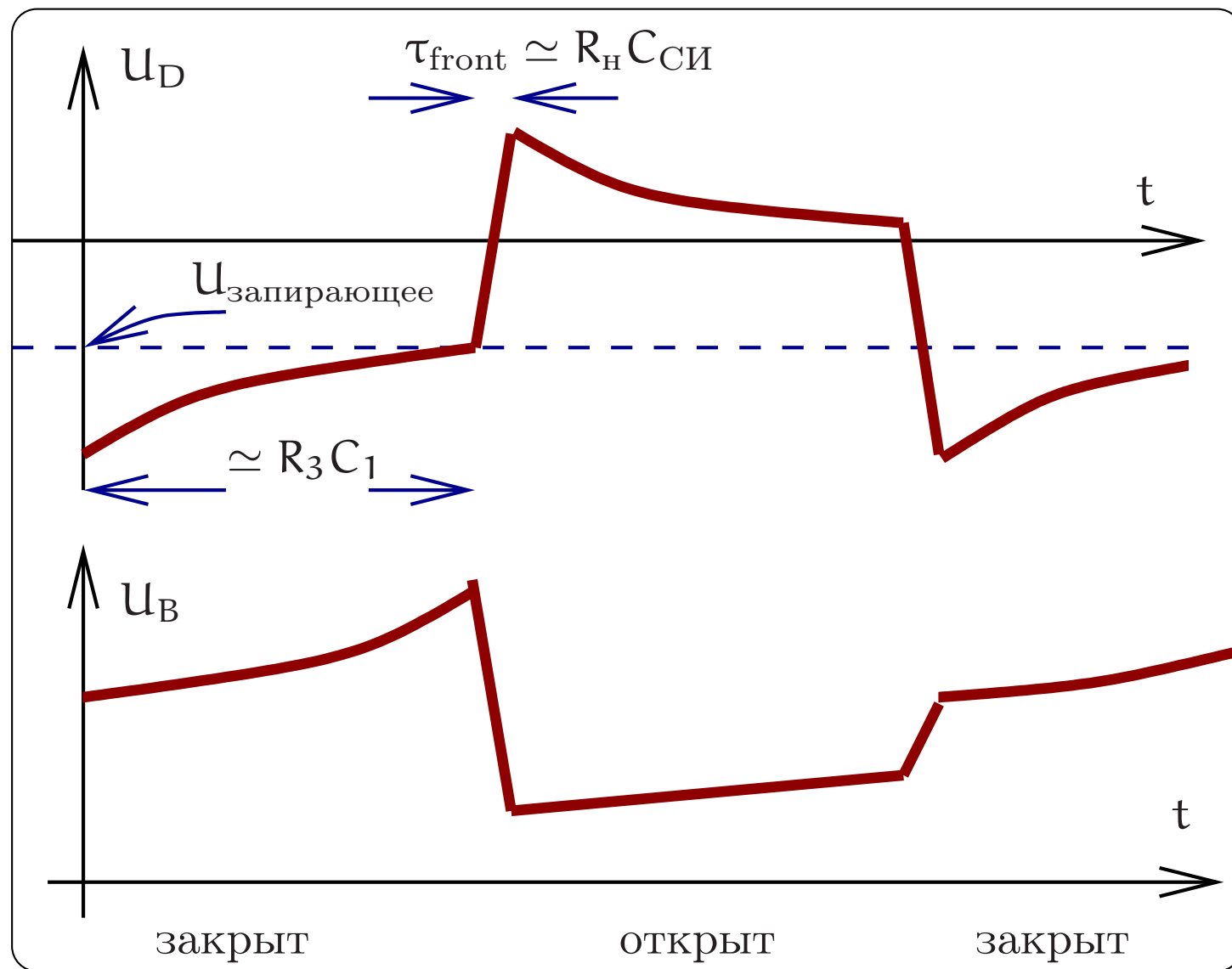
Во время скачка U_{C1} практически не меняется. Скачок кончится, когда правый транзистор будет заперт.

Во время скачка U_A резко упало (ток I_1 сильно вырос), поэтому после скачка C_1 – **разряжается**. Этот ток I_{C1} создает **отрицательное** напряжение на правом затворе и поддерживает правый транзистор **запертым**. Одновременно C_2 – дозаряжается от U_{C2} до U_+ . Этот ток поддерживает **положительное** напряжение на левом транзисторе (он открыт).



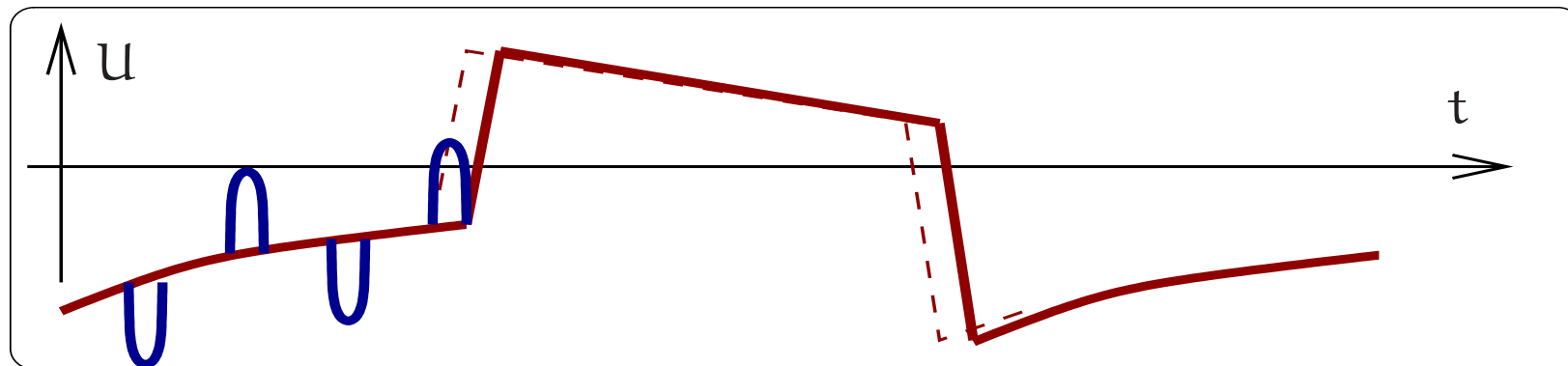
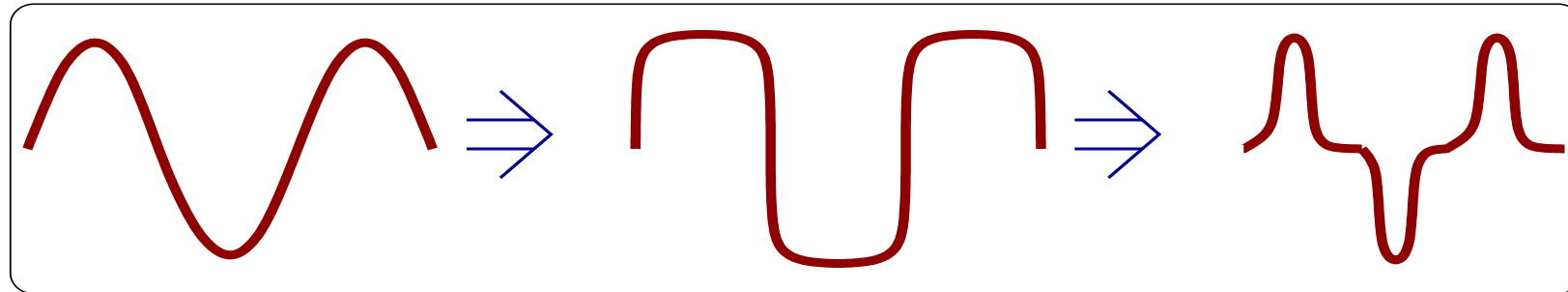
Во время скачка U_A резко упало (ток I_1 сильно вырос), поэтому после скачка C_1 и C_2 – **разряжается**. Этот ток I_{C1} создает **отрицательное** напряжение на правом затворе

поддерживает правый транзистор **запертым**. Одновременно C_2 – дозаряжается от U_{C2} до U_+ . Этот ток поддерживает **положительное** напряжение на левом транзисторе (он открыт). (*) Когда C_1 разрядится, напряжение на затворе правого транзистора станет **меньше** запирающего. Тогда ток через правый транзистор возрастет, и произойдет **обратный скачок**: в итоге будет запер левый транзистор.



Мультивибратор - делитель частоты

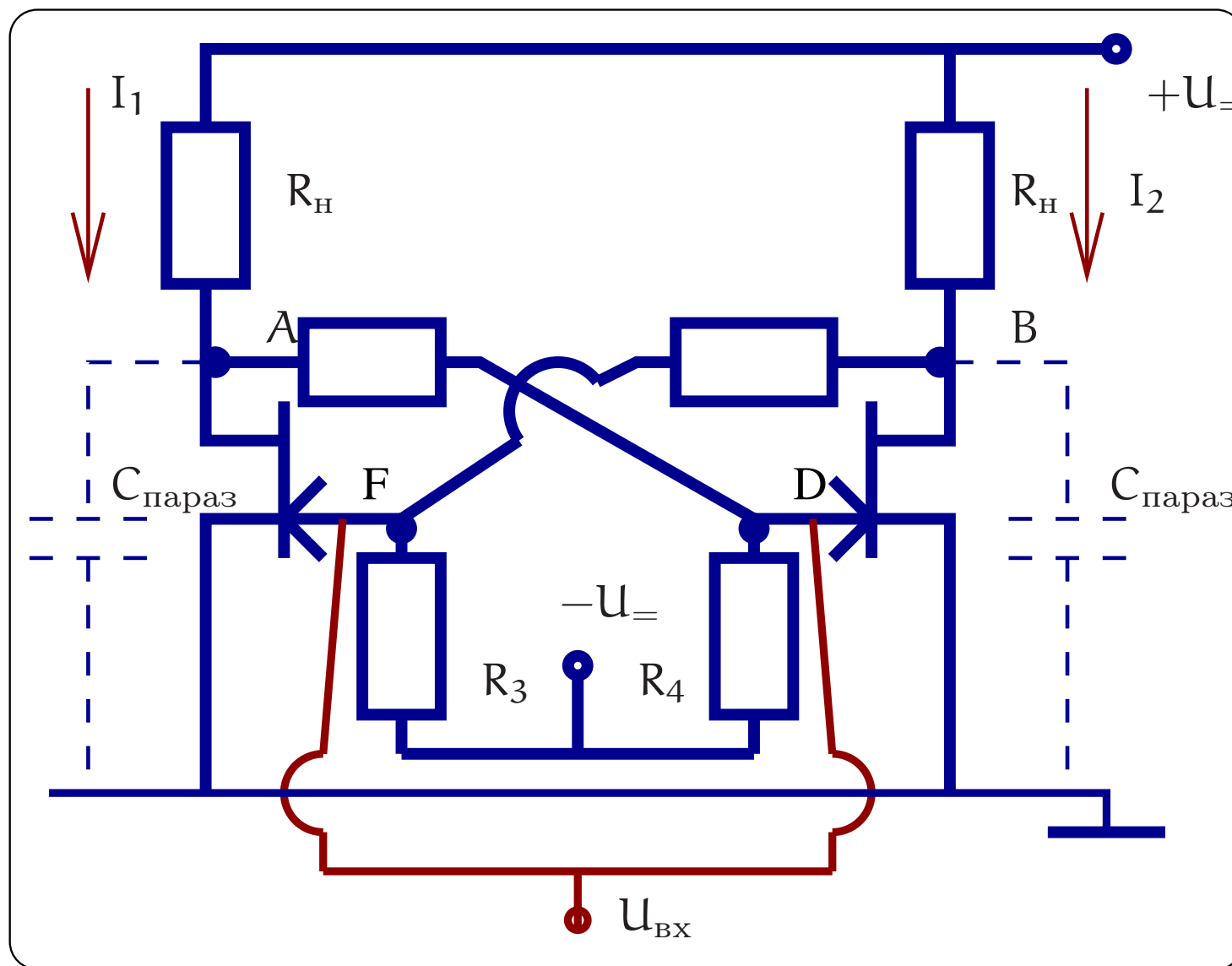
Сделаем такое преобразование

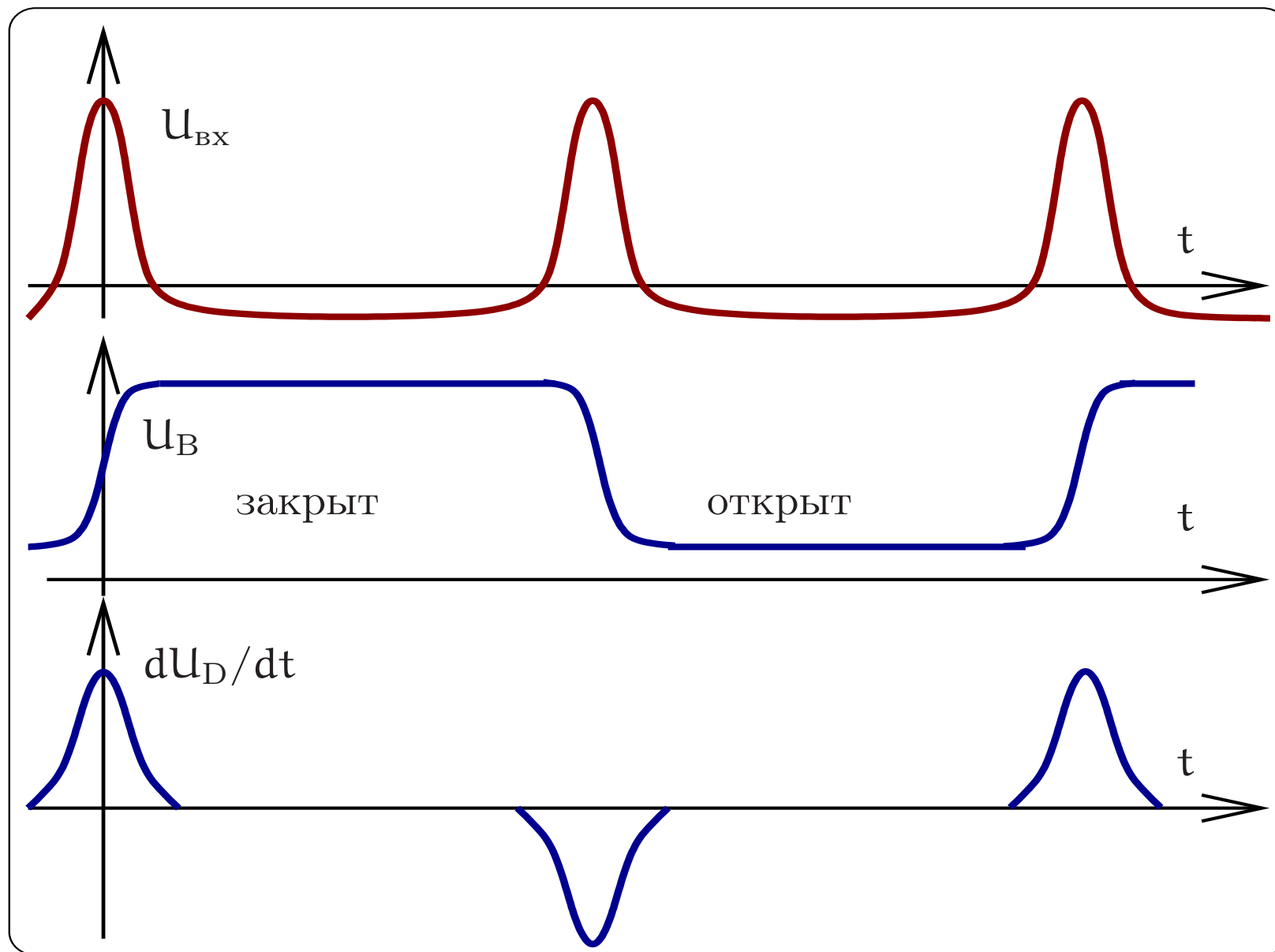


Если сформированное таким образом напряжение подключить к затвору, то период мультивибратора будет *управляться* (синхронизация). Удобно делить частоту в 2...30 раз. В осциллографе это обычная процедура.

Триггер

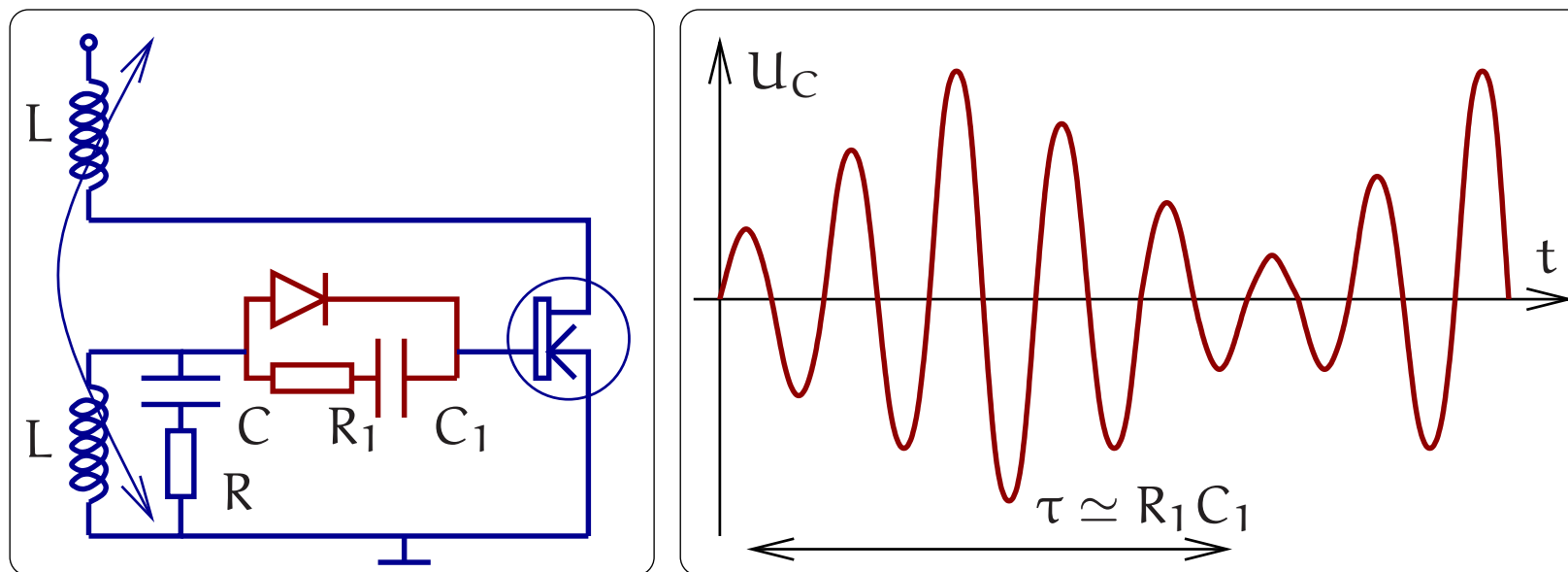
– система с двумя устойчивыми положениями равновесия (основной элемент ЭВМ). Это модифицированный мультивибратор: напряжение питания понижено, так что автоколебаний нет. Подбором параметров можно добиться *двух* устойчивых положений равновесия (1-ый транзистор открыт, а 2-ой закрыт, или наоборот). Импульс входного напряжения перебрасывает триггер в другое состояние.





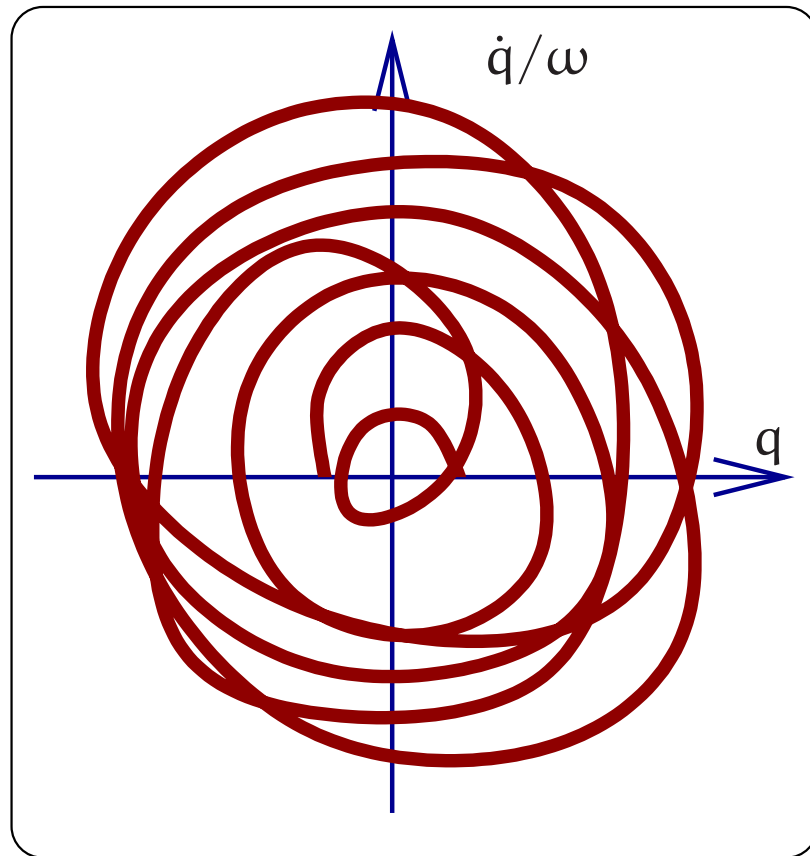
Прерывистая генерация. Динамический хаос.

Странный аттрактор Лоренца



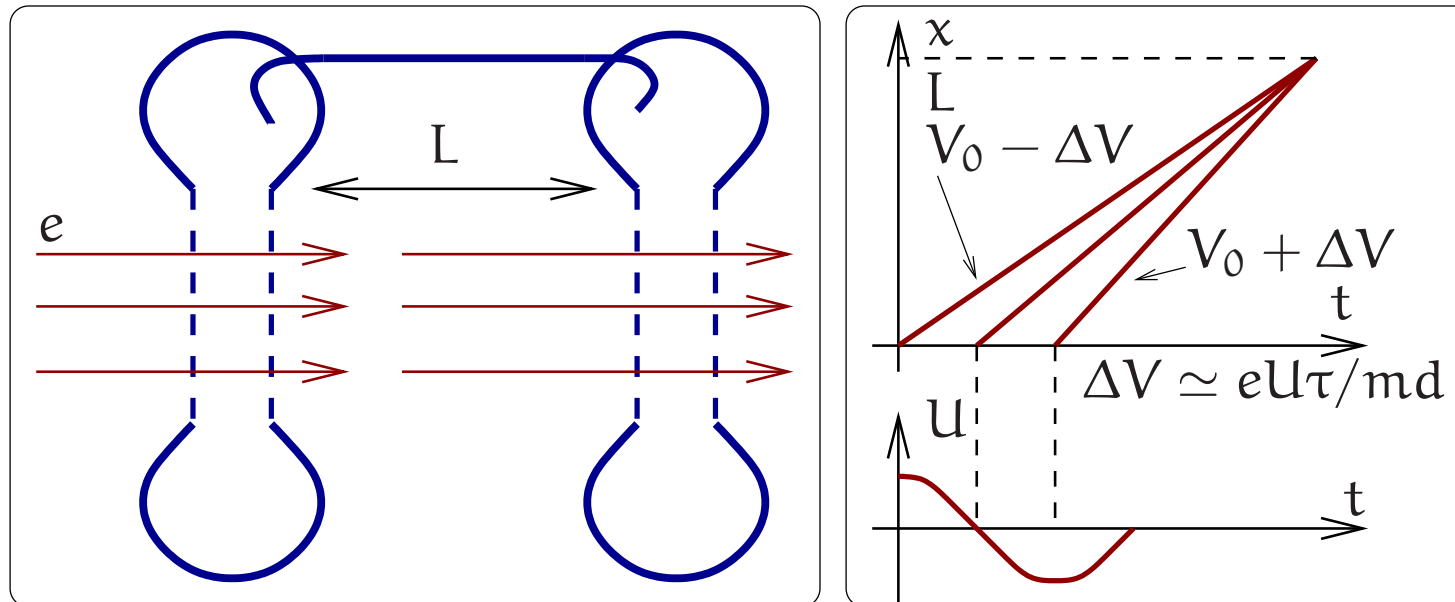
Картинка **не** повторяется. Рабочая точка ползает с “характерным временем” $\tau \simeq R_1 C_1$.

Странный аттрактор (аттрактор Лоренца).



Фазовая плоскость “равномерно” покрыта решениями. Нет предельного цикла

Клистрон



Формирование сгустков: Поток электронов — сначала через первый резонатор (время пролета $\tau \ll 1/\omega_0$). Электроны получают дополнительный импульс $\Delta p = \pm eU\tau/d$ — формирование электронных сгустков при пролете второго резонатора на расстоянии L от первого резонатора.

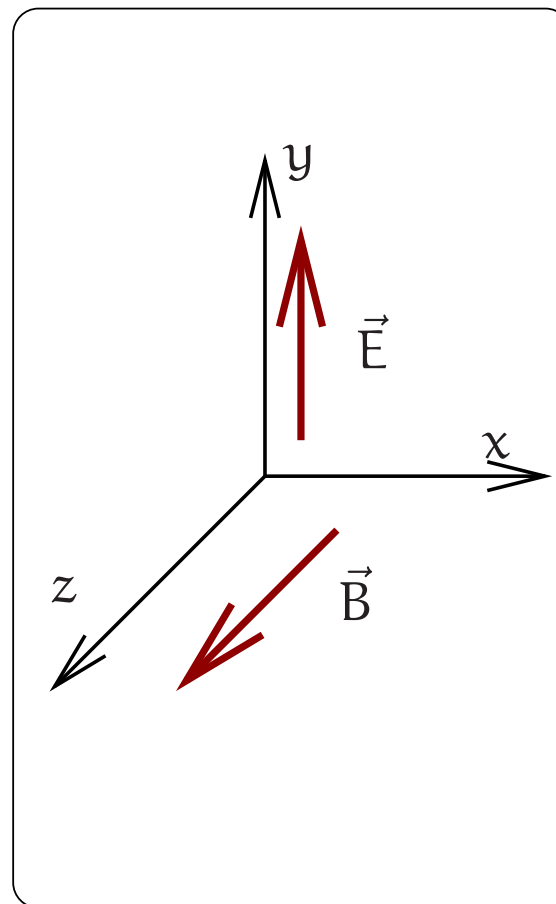
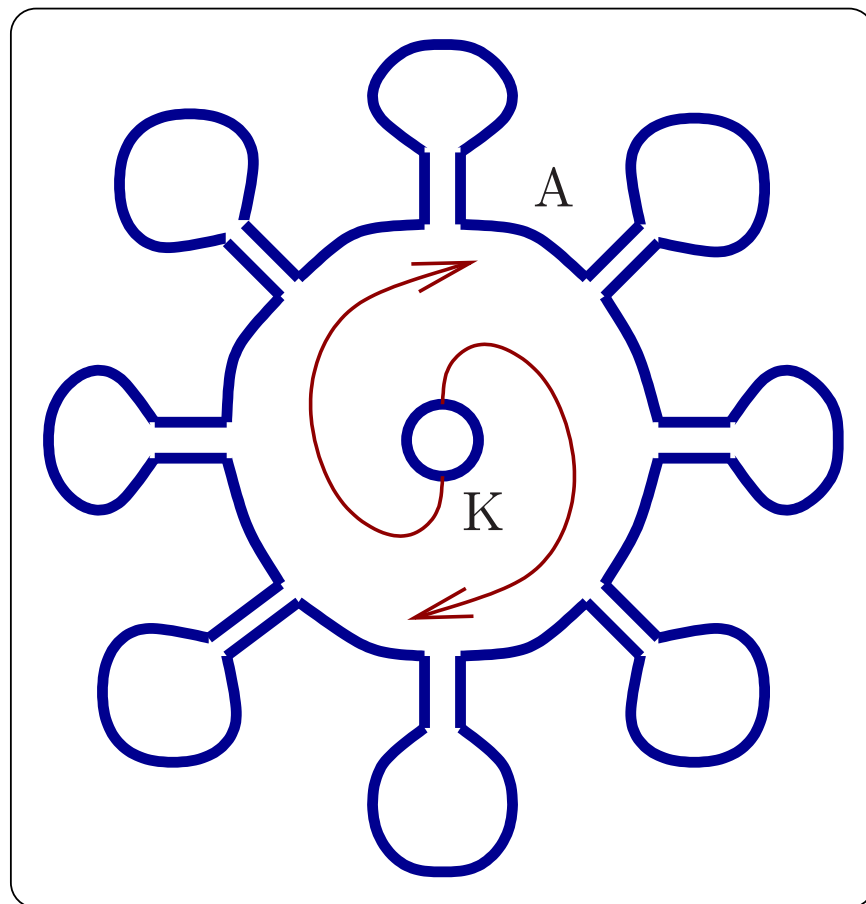
Клистрон (продолжение)

Подбирают время пролета так, чтобы в момент влета сгустков электронов во второй резонатор электрическое поле в нем было бы *тормозящим* — тогда электроны будут *отдавать* энергию электро-магнитным колебаниям. Первый и второй резонаторы должны быть связаны.

Отражательный клистрон.

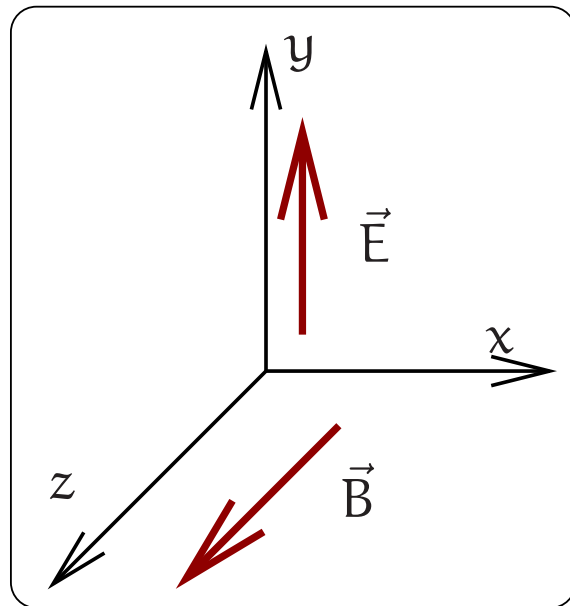
Мощность клистронов: до 1 МВт в непрерывном и до 20 МВт в импульсном режиме $\lambda \simeq 1\text{mm} \dots 10\text{cm}$. Высокое значение к.п.д. (до 70% кинетической энергии электронов преобразовывается в энергию колебаний).

Магнетрон



Вспомогательная задача:

движение электрона (заряд q и масса m) в скрещенных полях



$$m\ddot{x} = q(\vec{V} \times \vec{B})_x = q\dot{y}B,$$

$$m\ddot{y} = qE - q\dot{x}B.$$

Переходим в другую инерциальную систему $x = x' + V_0 t$:

$$m\ddot{x}' = q\dot{y}B,$$

$$m\ddot{y} = \underbrace{qE - qV_0B}_{\text{выбираем } =0} - q\dot{x}'B.$$

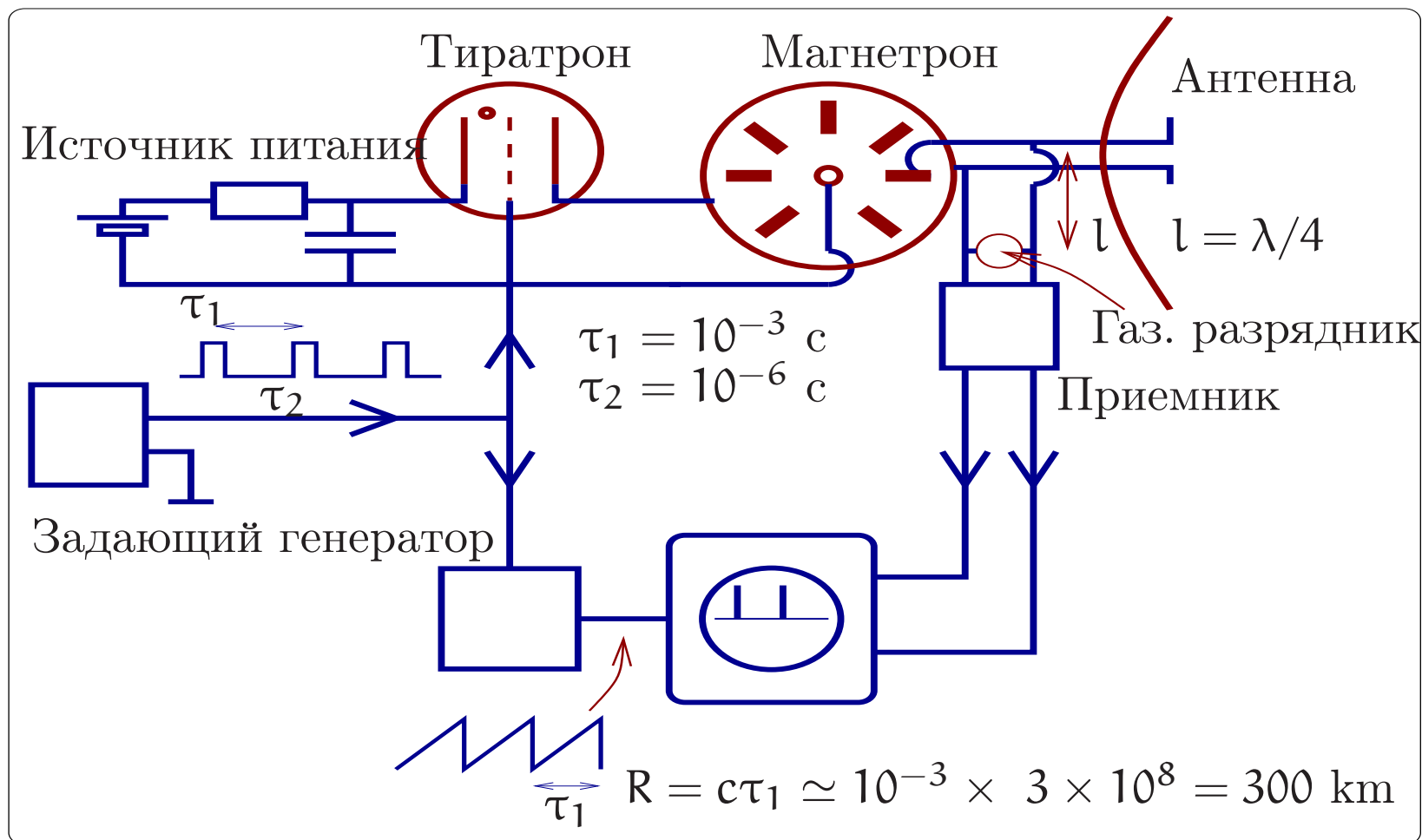
Выбираем $V_0 = E/B$ — наложение поступательного и вращательного движений, V_0 — скорость дрейфа. **Циклоида.**

При $V_0 = E/B$ — наложение постиупательного движения и вращения в магнитном поле B . **Циклоида**. Важно: $\vec{V}_0 \perp \vec{E}, \vec{B}$

В магнетроне: электроны испытывают “клистронный” эффект: у одного резонатора они **получают** добавки к скоростям, которые приводят к формированию сгустков заряда. У другого — сгустки (“спицы”) **отдают** энергию. Колебания в соседних резонаторах в противофазе.

Мощность магнетронов: от 1 Вт (малогабаритные лабораторные магнетроны) до 1 МВт импульсной мощности в РЛС.

Схема радиолокатора



Расписание второй контрольной (2009)

201 гр. Срд. 13 мая: 15.15, ауд. 5-48,

202 гр. Срд. 13 мая: 15.15, ауд. 5-25,

203 гр. Втр. 12 мая, 15.15, ауд. 5-68,

204 гр. Срд. 13 мая: 17.15, ауд. 5-39,

205 гр. Чтв. 14 мая, 10.50, ауд. 1-31,

206 гр. Чтв. 14 мая, 10.50, ауд. 5-37,

207 гр. Чтв. 14 мая, 17.00, ауд. 5-48,

208 гр. Срд. 13 мая: 17.00, ауд. 5-38,

209 гр. Срд. 13 мая: 17.00, ауд. 5-52,

210 гр. Чтв. 14 мая, 17.00, ауд. 5-25,

220 гр. Чтв. 14 мая, 17.15, ауд. 5-41