Обобщенные функции

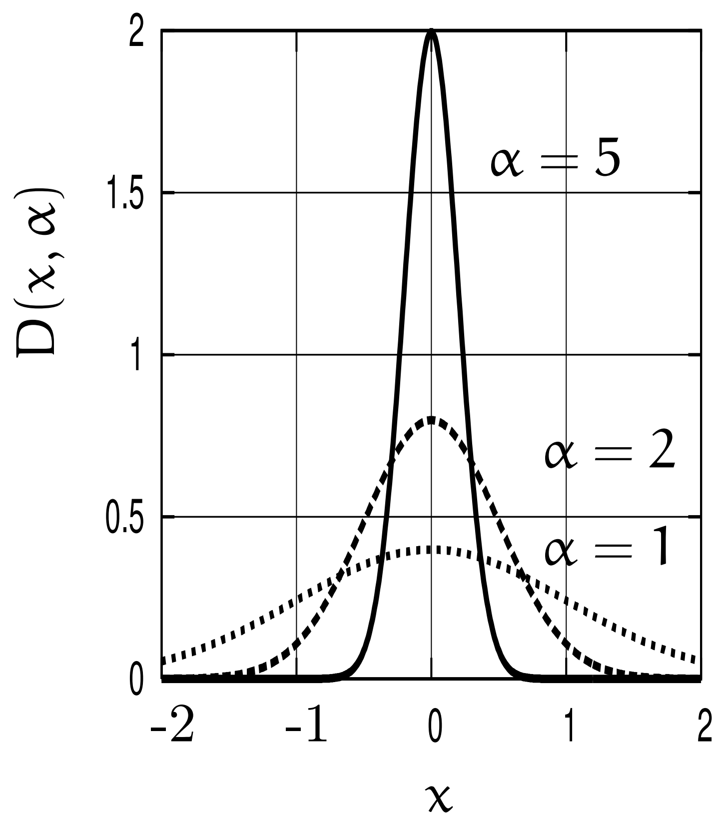
Дельта-функция

Одно из определений дельта-функции:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to\infty} D(x,\alpha),$$

$$D(x,\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi}}\,\exp\left(\frac{-\alpha^2 x^2}{2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x,\alpha)\,dx = 1$$



Фурье преобразование дельта-функции

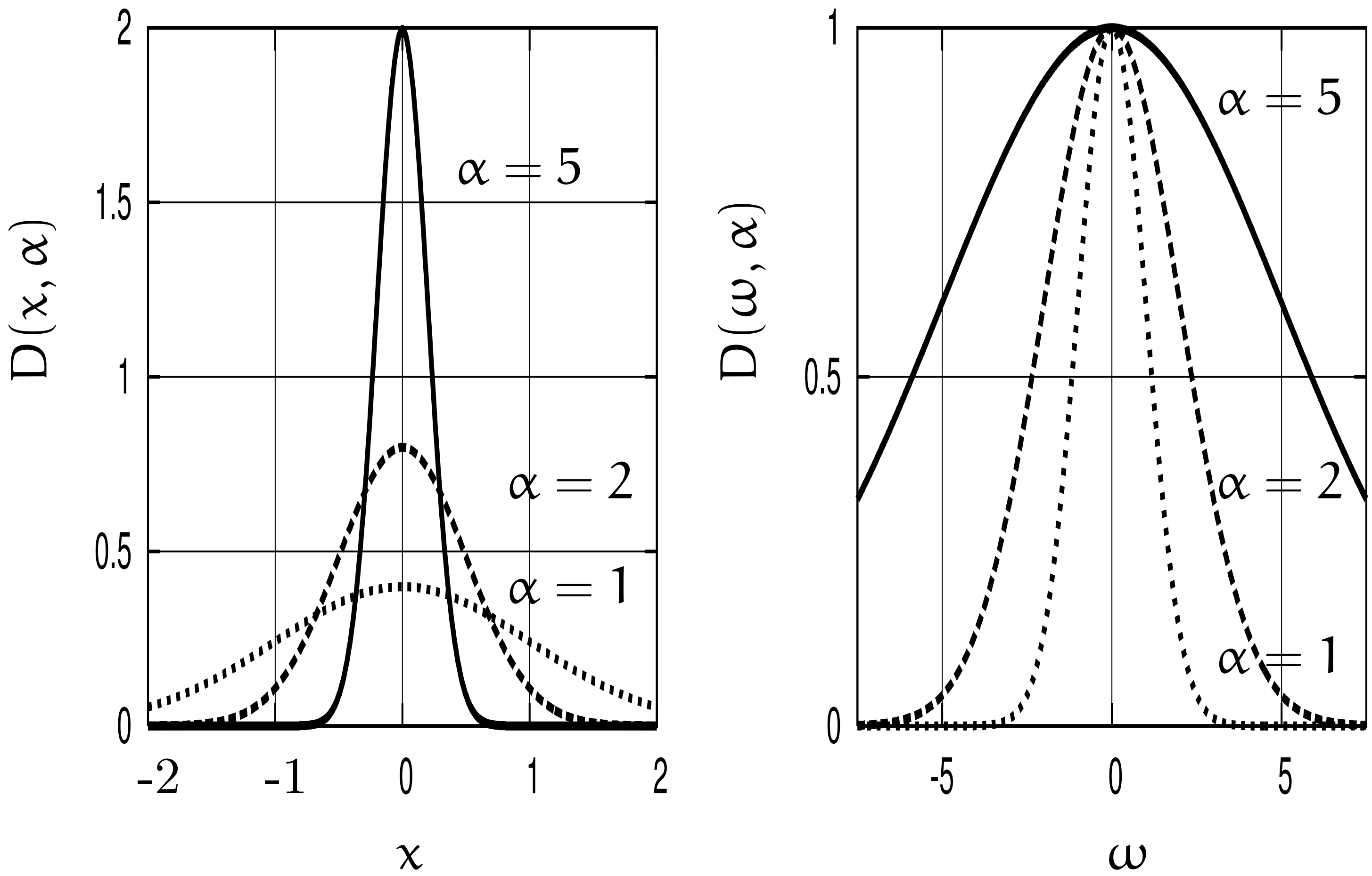
$$D(\omega,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} D(x,\alpha)\,e^{-i\omega x}\,dx.\quad D(x,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} D(\omega,\alpha)\,e^{i\omega x}\,\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$D(\omega,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi}}\,\exp\left(\frac{-\alpha^2x^2}{2}-i\omega x\right)\,dx=\exp\left(\frac{-\omega^2}{2\alpha^2}\right),$$

$$\frac{-\alpha^2x^2}{2}-i\omega x=-\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}}+\frac{i\omega}{\sqrt{2}\,\alpha}\right)^2-\frac{\omega^2}{2\alpha^2},$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\mathbf{D}(\omega,\alpha)=\mathbf{1},$$

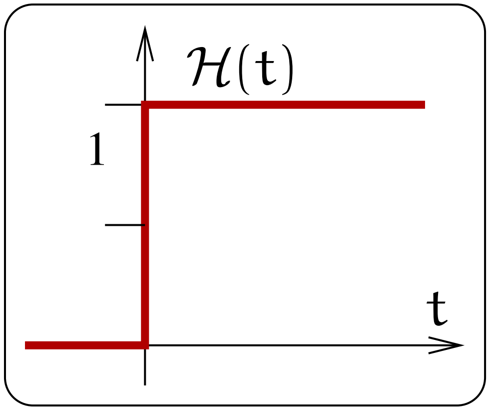
$$\delta(\mathbf{x})=\lim_{\alpha\to\infty}D(x,\alpha)=\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}D(\omega,\alpha)\,e^{i\omega x}\,\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\,\frac{d\omega}{2\pi}$$


D(x, α)
α = 5
α = 2
α = 1
x
D(ω, α)
α = 5
α = 2
α = 1
ω

Функция Невисайда (“ступенька”)

$$\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } t > 0, \\ 1/2 & \text{если } t = 0, \\ 0 & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$



Формально функция Невисайда не имеет Фурье-образа

(не интегрируема). Введем “заваленную на ∞” ступеньку $H(t,\epsilon)$.

$$\mathcal{H}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} H(t,\epsilon) = \begin{cases} e^{-\epsilon t} & \text{если } t > 0, \\ 1/2 & \text{если } t = 0, \\ 0 & \text{если } t < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Найдем Фурье-образ функции $H(t,\epsilon)$

$$H(\omega,\epsilon) = \int_0^\infty e^{-\epsilon t - i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega + \epsilon},$$

Обратное преобразование:

$$H(t,\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \epsilon}\, \frac{d\omega}{2\pi},$$ применяем вычеты

Полюс: $\omega = i\epsilon$ в верхней полуплоскости

$t > 0$: интегируем по верхней полуплоскости

$$\mathbf{H(t > 0, \epsilon) = e^{-\epsilon t}},$$

$t < 0$: интегируем по нижней полуплоскости

$$\mathbf{H(t < 0, \epsilon) = 0},$$

$t = 0$: $$\mathbf{H(t = 0, \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon - i\omega}{\omega^2 + \epsilon^2}\, \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2}}$$