

Сигнал

Сигналы: аналоговый, дискретный и цифровой.

Аналоговый сигнал — непрерывная функция непрерывного аргумента (радиоп физика “доцифровой эры”)

Дискретный (discrete) есть непрерывная функция, но определен только для дискретных значений аргумента.

Задается дискретной последовательностью отсчетов (samples) $u(n\Delta)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Частота дискретизации $f = 1/\Delta$,

Цифровой (digital) сигнал дискретен как по своим значениям, так и по аргументу (разновидность дискретного сигнала, округленного до определенного значения, набор этих значений (шкала квантования) задается заранее. Такое округление принято называть квантованием сигнала по уровню (не путать с квантовой механикой!).

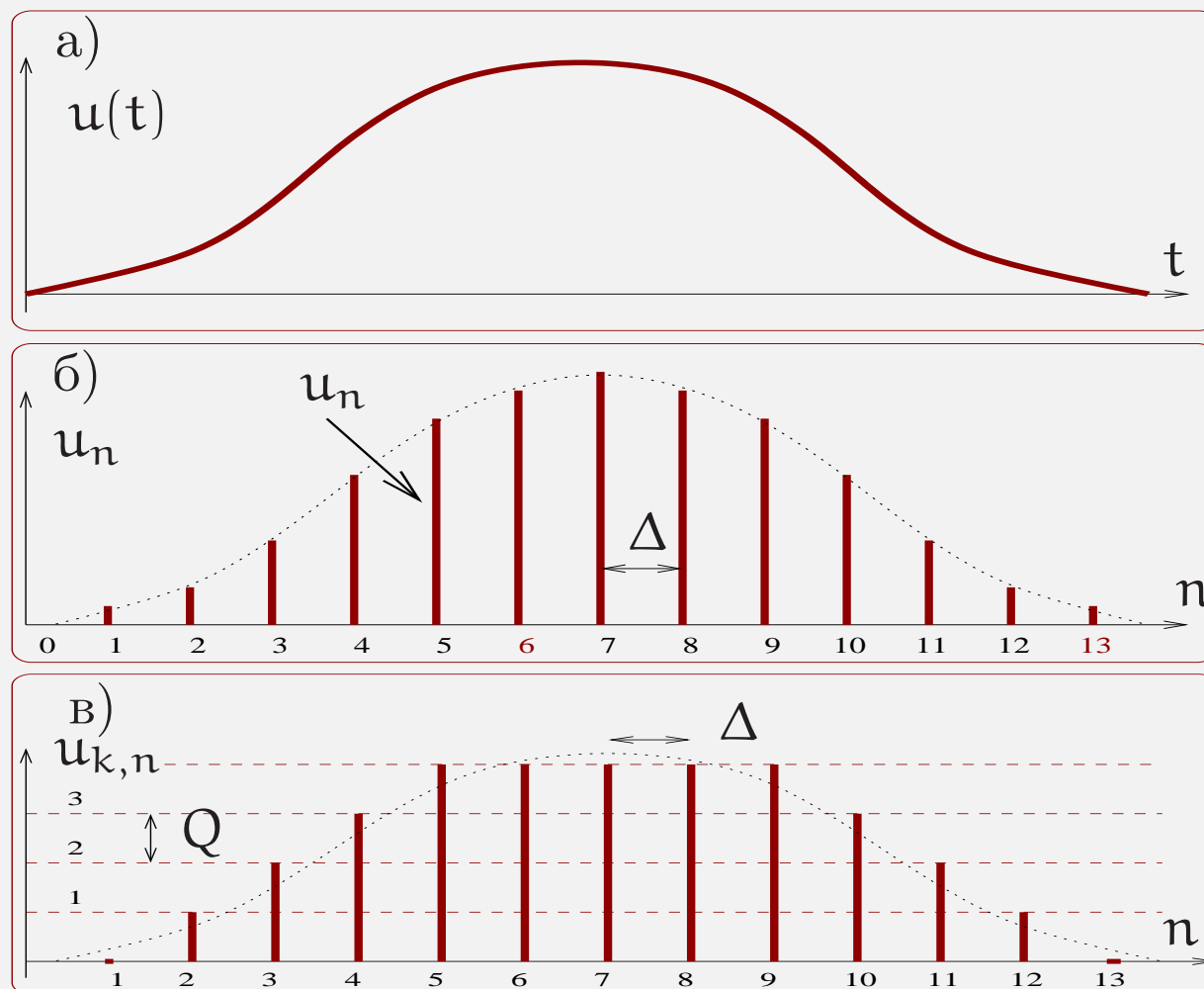


Рис. 1: а) Аналоговый сигнал. б) Дискретный сигнал.
в) Цифровой сигнал.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Имеем дискретный сигнал

$$u_k \equiv u(t_k), \quad t_k \equiv k\Delta, \quad k = 0, 1, 2 \dots N - 1, \quad \mathbf{N} \text{ четно} \quad (1)$$

Если $u(t)$ не ограничена по времени — отбрасываем “хвосты”. N чисел на входе — N на выходе. Ограничимся только дискретным набором частот

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}, \quad \left(\omega_n \equiv \frac{2\pi n}{N\Delta} \right) \quad (2)$$

Крайние значения n в (2) — частоты Найквиста. (n пробегает $N + 1$, а не N значений — два крайние значения зависимы (равны)).

Преобразуем интеграл Фурье в сумму:

$$U(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{2\pi i f_n t} dt \simeq \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2\pi i f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2\pi i k n / N}$$

Введем обозначение U_n :

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2\pi i k n / N} . \quad (3)$$

Преобразование (3) и называют *дискретным преобразованием Фурье*. N отсчетов u_k преобразуются в N комплексных чисел U_n . Преобразование (3) не зависит от интервала дискретизации Δ . Связь между обычным и дискретным преобразованием Фурье: $U(f_n) \simeq U_n \Delta$

Обратное дискретное Фурье преобразование (из набора U_n получить набор u_k) задается формулой

$$u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n e^{-2\pi i kn/N} \quad (4)$$

(3, 4) отличаются только знаком в показателе экспоненты и делением на N . Значит, численные процедуры для прямого ДПФ могут быть легко модифицированы и для обратного ДПФ.

Дискретный аналог равенства Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |u_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |U_n|^2 \quad (5)$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Перепишем формулу (3) для дискретного преобразования Фурье:

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} u_k, \quad W \equiv e^{2\pi i/N}. \quad (6)$$

Для вычисления одного элемента U_n потребуется N операций комплексного умножения, а для вычисления всех элементов U_n — N^2 операций (плюс еще меньшее количество операций для генерации коэффициентов W^{nk}). Для реализации ДПФ требуется $\mathcal{O}(N^2)$ операций.

Алгоритм БПФ выгодно отличается тем, что для той же задачи ему требуется всего лишь $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ операций. Разница между $\mathcal{O}(N^2)$ и $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ огромна, например, при $N = 10^6$ БПФ дает выигрыш в $\approx 5 \times 10^4$ раз!

Алгоритм БПФ стал широко известен в середине 60-х после работ Кули и Тьки (J.W.Cooley, J.W.Tukey), однако позже выяснилось, что подобные методы были независимо и раньше открыты десятком других исследователей, начиная с Гаусса (1805 год).

Лемма Даниельсона и Ланца (Danielson and Lanczos): дискретное преобразование Фурье длины N может быть записано как сумма двух преобразований длины $N/2$

$$\begin{aligned}
 U_n &= \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{2\pi i kn/N} = \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k} e^{2\pi i (2k)n/N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k+1} e^{2\pi i (2k+1)n/N} = \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k} e^{2\pi i kn/(N/2)} + e^{2\pi i n/N} \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k+1} e^{2\pi i kn/(N/2)} = \\
 &= U_n^{\text{чет}}(N/2) + W^n U_n^{\text{нечет}}(N/2), \quad W \equiv e^{2\pi i/N}.
 \end{aligned}$$

Лемму Даниельсона и Ланца можно применять *рекурсивно*.

Лемму Даниельсона и Ланца можно применять *рекурсивно*:

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_n^{\text{чет}}(N/2) + W^n u_n^{\text{нечет}}(N/2) = & (7) \\
 &= \left[u_n^{\text{чет-чет}}(N/4) + W^n u_n^{\text{чет-нечет}}(N/4) \right] + \\
 &\quad + W^n \left[u_n^{\text{нечет-чет}}(N/4) + W^n u_n^{\text{нечет-нечет}}(N/4) \right] = \dots
 \end{aligned}$$

Пусть N есть степень 2, т.е. $N = 2^m$ (m — целое). На практике обычно так и делают (если число $N \neq 2^m$, то его надо увеличить до ближайшей степени двойки, заполнив добавленные позиции нулями). Очевидно, что в этом случае ($N = 2^m$) мы можем продолжать рекурсию уменьшая N вплоть до единицы. В конце концов получим одно-точечное преобразование:

$$u_n^{\text{нечет-чет-чет-...-нечет-чет-нечет}}(1) = u_k \quad \text{для индекса } k \quad (8)$$

Осталось выяснить какой конкретной комбинации (чет) и (нечет) соответствует u_k в выражении (8). Ответ: надо привести обращение (реверсию) битов в комбинации (нечет-чет-чет-... - нечет-чет-нечет) и это число в *двоичной* системе будет равно числу k в (8). Для этого надо сначала записать комбинацию (нечет-чет-чет-... - нечет-чет-нечет) в двоичной системе, присвоив значения чет=0, нечет=1. Например, комбинация нечет-чет-чет-... - нечет-чет-нечет запишется в виде (100...101). Для обращения (инверсии) надо просто заменить порядок следования нулей и единиц на обратный, в нашем примере получится число (101...001). Это число и будет равно числу k в (8), записанному в двоичной системе.

Дальнейшее почти очевидно. Мы можем выбрать два соответствующих одно-точечных преобразования вида (8), образующих 2-точечное преобразование. Таких пар будет $N/2$. Далее собираем из 2-точечных преобразований 4-точечные и так далее, пока не получим две половинки полного преобразования в соответствии с формулой (7). Каждая такая комбинация требует N операций, а количество комбинаций есть $\log_2 N$, поэтому весь алгоритм требует порядка $N \log_2 N$ операций (мы считаем, что операция сортировки при обращении битов требует меньшее число операций).

Количество информации

Рассмотрим сообщение из n . Число градаций – m . Полное количество комбинаций

$$N = m^n$$

Кол-во информации I должно $I \sim n$ (как стоимость телеграммы). С другой стороны $I = f(N)$. Выпишем:

$$\begin{aligned} df &= K dn, & df &= \frac{df}{dN} N \ln(m) dn, \\ \Rightarrow & & f &= \log_a N \end{aligned}$$

здесь K , a – постоянные. Для определения постоянной a выберем $m = 2$, $n = 1$ (“бит” информации):

$$1 = \log_a(2^1), \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$\begin{aligned}df &= K dn, & df &= \frac{df}{dN} N \ln m dn, \\ \Rightarrow & & f &= \log_a N\end{aligned}$$

здесь K , a — постоянные. Для определения постоянной a выберем $m = 2$, $n = 1$ (“бит” информации):

$$1 = \log_a(2^1), \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Формула для количества информации:

$$I = \log_2 N = n \log_2 m$$

Передача информации через канал связи

Пусть сообщение — функция $u(t)$, ее спектр ограничен: $f < F_0$.

По т. Котельникова — передача набора импульсов через время

$\Delta t = 1/(2F_0)$, за время t — $2F_0 t$ импульсов. Если число

градаций m , то количество информации $I(t)$ и скорость R

передачи информации:

$$I = 2F_0 t \log_2 m, \quad (9)$$

$$R = \frac{dI}{dt} = 2F_0 \log_2 m.$$

Число градаций m не может быть бесконечным из-за наличия шумов. Шеннон (1948 г.):

$$I_{\max} = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n} \right),$$
$$R_{\max} = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n} \right),$$

W_s – мощность сигнала, а W_n – мощность шума. Величину I_{\max} (10) называют еще объемом сигнала. Надо:

a) полоса частот F_k , пропускаемых каналом, должна быть достаточно велика: $F_k > F_0$;

b) время связи t_k через канал должно быть также достаточно велико: $t_k > t$;

c) превышение сигнала над шумом в канале $H_k = \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n} \right)$ должно быть также больше соответствующей величины H канала: $H_k > H$.

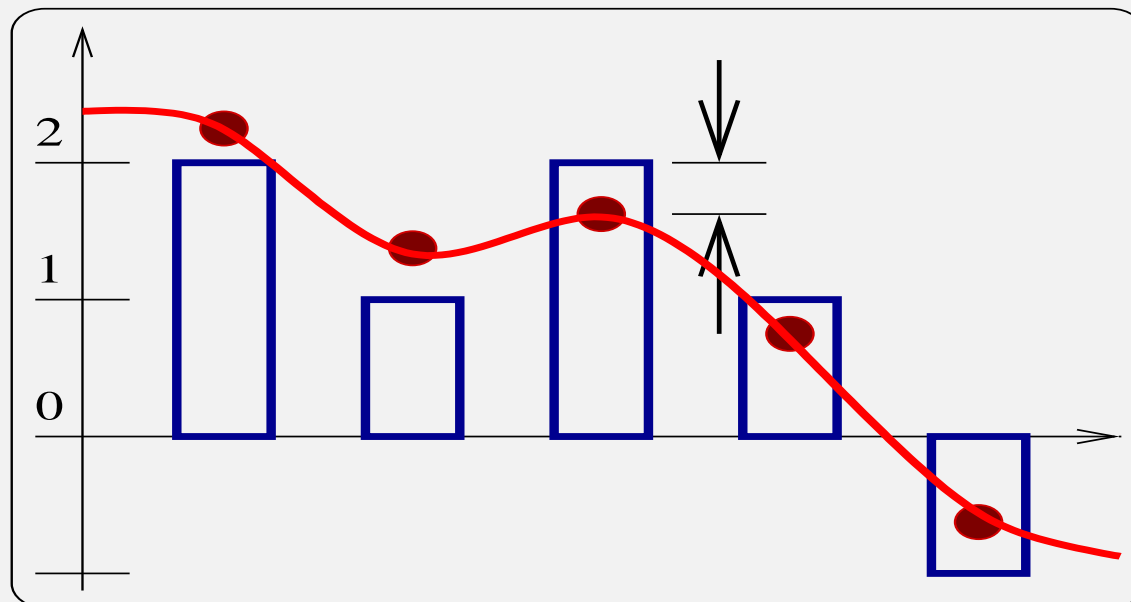
$$I_{\max} = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n} \right), \quad (12)$$

$$R_{\max} = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n} \right), \quad (13)$$

Величину $F_k t_k H_k$ называют емкостью канала.

Шумы квантования

Число градаций m . Пусть нет обычных шумов. Пусть шаг дискретизации равен b . Если амплитуда сигнала равновероятна в пределах шага b , то заменяя ее дискретным значением, мы допускаем ошибку.



$$\sigma^2 = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{b} x^2 dx = \frac{b^2}{12},$$

$$U_s^2 = \frac{m^2 b^2}{12},$$

$$U_s^2 = \sigma^2 + U_{qs}^2,$$

где U_{qs}^2 — средний квадрат квантованного сигнала, то

$$U_{qs}^2 = (m^2 - 1) \frac{b^2}{12} = (m^2 - 1) \sigma^2$$

Выражаем отсюда m и подставляем в формулы (9):

$$I = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{U_{qs}^2}{\sigma^2} \right) = F_0 t \log_2 m^2, \quad (14)$$

$$R = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{U_{qs}^2}{\sigma^2} \right) = F_0 \log_2 m^2. \quad (15)$$

Различные каналы передачи информации

	F_0	m	$\log_2 m$	R бит/с
Телеграф	$4 \cdot 10^2$ Гц	2	1	$8 \cdot 10^2$
Телефон	$4 \cdot 10^3$ Гц	128	7	$6 \cdot 10^4$
Телевидение	$6 \cdot 10^6$ Гц	30	~ 5	$6 \cdot 10^7$

Интересно: через зрение человек получает $2 \cdot 10^4$ бит/сек. Это много меньше, чем по ТВ: записывается не каждый кадр, а лишь *изменение* картинки (но (!) мозг помнит всю текущую картинку).

Современные каналы информации: СВЧ кабель, витая пара и оптический волновод.

СВЧ кабель: $F_0 \simeq 10^{10}$ Гц, т.е. по СВЧ кабелю можно передавать ~ 1000 ТВ каналов или $2,5 \cdot 10^6$ телефонных каналов.

Витая пара (дешевле и удобнее). Скорость передачи $100 \dots 1000$ Мбит/сек.

Оптический кабель: $F_0 \simeq 10^{14}$ Гц, (пока полоса частот лишь $\sim 10^{10}$ Гц). Скорость передачи информации: до 100 Гбит/сек. Диаметр сердцевины $\sim 5 \mu$, оболочка $\sim 20 \mu$. Затухание на длине волны $\lambda \sim 1.6 \mu$, составляет $0,2$ дб/км (интенсивность уменьшается в e раз на расстоянии 30 км). На каждом волноводе нужны оптические усилители на расстоянии ~ 10 км.

Скорость передачи информации — 120 Терабит/с !

Достигнута была такая скорость в офисе одной из компьютерных фирм при падении со стеллажа высотой в один метр 8 коробок, каждая из которых содержала 20 накопителей Seagate Barracuda 300 GB.

Общий объем переданной на расстояние 1 метра информации составил $300 \times 20 \times 8 = 48000$ GB, время передачи составило $t = \sqrt{2h/g} = 0.4$ секунды.

Средняя скорость передачи информации составила

120 Терабит/сек !!

Надежность передачи информации

Пусть одит бит – за время τ , полоса частот $\Delta f \simeq 1/\tau$. Мощность тепловых шумов в соглас. линии $W_T = kT \Delta f$, поэтому для передачи каждого бита нужна энергия $> kT$.

Величина \mathcal{E}/kT постоянно уменьшается. Если средняя энергия, рассеиваемая процессором W , тактовая частота ν , а количество элементов N , то очевидно, что

$$\frac{\mathcal{E}}{kT} = \frac{W}{\nu N kT}$$

Приведем оценки для различных процессоров:

Процессор	W	ν	N	$\frac{\mathcal{E}}{kT}$
886	1 Вт	5 МГц	$5 \cdot 10^4$	$\sim 10^9$
Pentium 4	100 Вт	3 ГГц	10^8	$\sim 7 \cdot 10^4$
Моб. Pentium 4	10 Вт	3 ГГц	$5 \cdot 10^7$	$\sim 10^4$

В оптике $kT \ll \hbar\omega$. Можно показать, что предельная величина для передачи одного бита за время τ составляет

$$\mathcal{E} \geq \frac{\hbar}{\tau}.$$

Плотность записи

CD — $0.6 \text{ Gb} = 6 \times 10^8 \text{ b}$. $r \simeq 6 \text{ см}$, $\pi r^2 \simeq 100 \text{ см}^2$.

БСЭ (без картинок): $50 \text{ томов} \times 500 \text{ стр.} \times 20 \text{ Kb} = 5 \times 10^8 \text{ b}$

Плотность записи на CD: $\simeq 6 \times 10^6 \text{ b см}^{-2}$, т.е. на один бит (1 байт = 8бит) расходуется площадка размером $\simeq 2 \times 10^{-4} \text{ см}$.

Винчестер: наибольшая плотность записи 20 Gb/дюйм^2 .

На один бит — площадка 200 нм (несколько сотен доменов).

Предел плотности записи?

Февраль 2001: IBM — плотность записи 100 Gb/дюйм^2 .

Октябрь 2007 Western Digital — 520 Gb/дюйм^2

Декабрь 2008 TDK — 800 Gb/дюйм^2

На один бит — площадка размером $\simeq 30 \text{ нм}$.

250 DVD-дисков на носителе размером с монету (фев.2009)

Ученые университета Калифорнии (Беркли) и университета Массачусетса (Амхерст) представили новую технологию, основанную на наноэлементах; данная технология, являясь относительно несложной в аспекте производственной реализации, обеспечивает беспрецедентную плотность при хранении данных.

Основой разработки стала новая структура упорядоченных элементов размером в 3 нм каждый; эта система позволяет сохранять данные с плотностью в 10 терабит на 1 квадратный дюйм (примерно 6,5 кв. см). Таким образом, подобный носитель способен сохранять данные, эквивалентные 250 DVD-дискам на площади, размером с обычную монету.