

Основы квантовой информатики

Конспект лекций для студентов 5-ого курса (8-ой семестр)
Кафедра физики колебаний физического факультета МГУ

Сергей Петрович Вятчанин и Фарид Явдатович Халили

Предварительная версия от 14 апреля 2003 г.

Оглавление

1 Бомбовый парадокс	2	6 Квантовое клонирование и квантовая телепортация	23
1.1 Качественное рассмотрение	2	6.1 Квантовое клонирование	23
1.2 Математическое описание	3	6.2 Вариант телепортации [2]	24
2 Двухуровневые системы	4	6.2.1 Частный случай: $ b = 1$	24
2.1 Примеры двухуровневых систем	4	6.2.2 Общий случай	24
2.2 Спиновые операторы	5	7 Квантовые гейты	26
2.2.1 Матрицы Паули	5	7.1 Интерферометр Маха-Цандера	26
2.2.2 Операторы рождения и уничтожения фермионов	5	7.2 Квантовые гейты	27
2.3 Атом в переменном э.м. классическом поле.	5	7.3 Задача Дойча	27
2.4 Атом в переменном э.м. квантовом поле.	6	7.4 Обобщенная задача Дойча	28
2.5 Два связанных осциллятора	8	8 Задачи	30
3 Квантовый парадокс Зенона	9	А Матрицы Паули	30
3.1 Точное измерение	9	А.1 Амплитуды вероятностей	30
3.2 Элементы теории непрерывных квантовых измерения	10	А.2 Оператор σ_ϕ	31
3.3 Парадокс Зенона в двух-уровневой системе	12	Б Примеры: 2 частицы	31
4 Парадокс ЭПР	13	Б.1 КШ+	31
4.1 Качественное рассмотрение	13	Б.1.1 Амплитуды для состояний Φ_\pm	32
4.2 Пример 1	15	Б.2 КШ-	32
4.3 Пример 2	16	Б.2.1 Амплитуды для состояний Φ_\pm	33
4.4 Эксперимент	17	Б.3 Состояние ЕПР+	33
5 Элементы классической теории информации	19	Б.3.1 Амплитуды для состояний Φ_\pm	33
5.1 Количество информации	19	Б.4 Состояние ЕПР-	34
5.2 Пропускная способность канала	20	Б.4.1 Амплитуды для состояний Φ_\pm	34
5.3 Обратимые логические операции	21	В Примеры: 3 частицы	35
5.4 Количество квантовой информации	22	В.1 GHZ+	35
		В.2 GHZ-	35
		Г Обозначения	36

Предисловие

Мы предлагаем конспект лекций по курсу "Основы квантовой информатики". Этот курс представляет собой вторую часть курса "Квантовая механика для радиофизиков". Считая, что лучшее — враг хорошего, мы рискнули выложить для вашего внимания *очень* предварительную версию, надеясь, что даже и в нынешнем несовершенном виде она сможет быть полезна студентам.

Мы будем весьма признательны за любые критические замечания, которые можно направлять по адресам:

vyat@hbar.phys.msu.su (С. П. Вятчанин)

farid@hbar.phys.msu.su (Ф. Я. Халили)

1 Бомбовый парадокс

1.1 Качественное рассмотрение

Пусть на складе военной базы находятся супербомбы, взрыватели которых очень чувствительные: они сдвигаются от единичного фотона на расстояние, которое приводит к взрыву. Фактически такой взрыватель действует как идеальный измеритель одиночных фотонов: либо он регистрирует 0 (нет фотонов), либо — 1, т.е. есть фотон (после этого происходит взрыв). Известно, однако, что взрыватели части бомб неисправны (замыты) и двигаться не могут. Военному специалисту Васе (выпускнику физфака) командование поставило задачу выбрать хотя бы одну заведомо исправную бомбу дабы положить (в темноте, разумеется) ее в чемодан спецаргента ХХХ.

Вася соорудил установку, изображенную на рис. 1. Это интерферометр Маха-Цандера, одно из непрозрачных зеркал (В) которого является взрывателем супер-бомбы. Входное и выходное зеркала с вероятностью 50% пропускают или отражают свет. На вход интерферометра подается свет от лазера, дающего только одиночные фотоны (это можно сделать за счет уменьшения его интенсивности). Вася отрегулировал длину плечей так, что фотоны попадают только на детектор L, если зеркало В неподвижно. Поэтому если взрыватель бомбы неисправен и двигаться не может (и его положение известно Васе), то регистрировать фотоны будет только детектор L. В этом случае нельзя сказать по какому из плеч интерферометра прошел фотон. Это является условием того, что после интерференции на выходном зеркале фотон попадет на детектор L.

Теперь рассмотрим, что будет, если взрыватель бомбы исправен. Фактически такой взрыватель действует как идеальный измеритель одиночных фотонов: либо он регистрирует 0 (нет фотонов), либо — 1, т.е. есть фотон. В этом случае происходит *редукция* волновой функции фотона, после чего волна пойдет только по одному из плеч интерферометра, а в другом плече волны не будет. Примерно с равной вероятностью 1/2 фотон пройдет через зеркало В, либо через зеркало С. В первом случае, к сожалению, произойдет взрыв и Васе надо собирать новую установку (или командованию искать нового Васю). Однако, во втором случае (когда фотон пойдет через зеркало С) фотон после выходного зеркала может с равной вероятностью

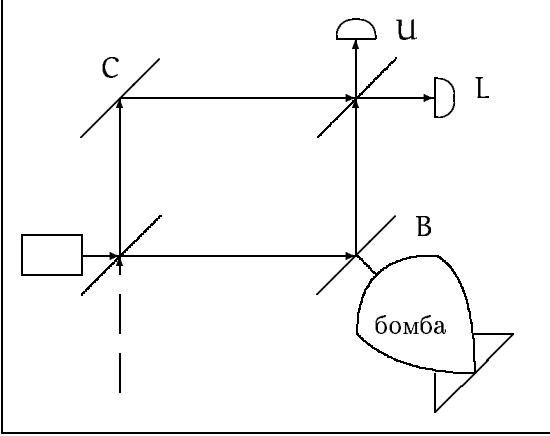


Рис. 1: Схема интерферометра Маха-Цандера, одно из непрозрачных зеркал которого является взрывателем супер-бомбы

попасть либо на детектор U, либо на детектор L. Тогда, зарегистрировав фотон в детекторе U, Вася будет точно знать, что бомба исправна.

Легко сообразить, что Вася выберет около четверти из общего числа всех исправных бомб, столько же будут ошибочно отнесены к неисправным и примерно половина всех исправных бомб будет взорвана.

1.2 Математическое описание

Светоделитель Состояние, поступающее на входной светоделитель интерферометра можно описать как

$$|\psi_{in}\rangle = a^\dagger|00\rangle = |10\rangle \quad (1.1)$$

Здесь оператор a^\dagger относится к моде лазера. Через v , v^\dagger обозначают аналогичные операторы, относящиеся к вакуумной моде (пунктирная стрелка на рис. 1).

Нетрудно выразить (в представлении Гейзенберга) операторы рождения выходных мод a_b (в плече В) и a_c (в плече С):

$$a_b = \frac{a + v}{\sqrt{2}}, \quad a_c = \frac{a - v}{\sqrt{2}}$$

Отсюда можно выразить оператор a для входного поля через операторы выходного поля: $a = \frac{a_b + a_c}{\sqrt{2}}$ и, подставив его в (1.1), получить состояние поля после светоделителя:

$$|\psi_{after 1}\rangle = \frac{a_b^\dagger + a_c^\dagger}{\sqrt{2}}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \quad (1.2)$$

Это можно делать, так как вакуумное состояние $|00\rangle_{in}$ для поля до светоделителя, которое фигурирует в (1.1), и вакуумное состояние $|00\rangle_{after 1}$ для поля после светоделителя неразличимы.

Таким образом после светоделителя мы имеем состояние, в котором один фотон распределен между двумя модами. При этом, например, член $|10\rangle$ имеет следующий смысл: в моде, соответствующей пути В есть фотон, в моде С — нет.

Второй светоделитель Нетрудно получить состояние поля перед вторым светоделителем, если зеркало В неподвижно. Для этого просто надо учесть эволюцию операторов a_b^\dagger и a_c^\dagger . Например, оператор a_b^\dagger перед вторым светоделителем выражается как $a_b^\dagger|_{before 2} = e^{i\omega l_b/c} a_b^\dagger$, где l_b — оптическая длина плеча В. Подставив это и аналогичное выражение для a_c в (1.2), получим состояние поля перед вторым светоделителем:

$$|\psi_{before 2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\omega l_b/c} |10\rangle + e^{i\omega l_c/c} |01\rangle \right) \quad (1.3)$$

Нетрудно показать, что при равенстве оптических путей $l_b = l_c$ на выходе второго светоделителя будет состояние

$$|\psi_{after 2}\rangle = e^{i\omega l_b/c} |10\rangle, \quad (1.4)$$

т.е. фотон с вероятностью равной 1 окажется в моде, регистрируемой детектором L. Наоборот, при разности путей в полдлины волны $l_b = l_c \pm \pi c/\omega$ фотон с вероятностью равной 1 окажется в моде, регистрируемой детектором U.

Ниже будем считать, что оптические пути одинаковы или отличаются на целое число длин волн.

Описание измерения Как уже упоминалось, супер-бомба с исправным взрывателем фактически является неразрушающим измерителем энергии в плече В. Слово "неразрушающий" относится, конечно, к фотону — после отражения от взрывателя фотон не уничтожается (чего не скажешь, к сожалению, о бомбе). В результате измерения возможно только два результата: взрыватель регистрирует или не регистрирует фотон (в нашем случае оба результата равновероятны). Процесс измерения описывается операторами-проекторами:

$$\hat{\pi}_1 = |1\rangle_b \langle 1|_b, \quad \hat{\pi}_0 = |0\rangle_b \langle 0|_b,$$

где операторы \hat{n}_1 и \hat{n}_0 описывают регистрацию и нерегистрацию фотона соответственно. Индекс b показывает, что измерения производятся в плече В.

Допустим, что взрыватель зарегистрировал фотон (опустим пока неизбежность взрыва). Произойдет *редукция* волновой функции и состояние поля после измерения будет

$$\frac{1}{N} \hat{n}_1 \psi_{\text{after } 1} = |10\rangle,$$

где N — нормировочный множитель. Мы видим, что после такого результата измерения состояние значительно изменилось — фотон присутствует в моде В и отсутствует в моде С. Теперь нетрудно найти, что после второго светоделителя состояние поля будет

$$|\psi_{\text{after } 2, n_b=1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_L 0_U\rangle - |0_L 1_U\rangle),$$

где, например, состояние $|1_L 0_U\rangle$ означает, что фотон присутствует в моде, регистрируемой детектором L и отсутствует в моде детектора U.

Нетрудно показать, что если взрыватель не регистрирует фотон, то состояние поля *тоже* кардинально меняется:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \hat{n}_0 \psi_{\text{after } 1} &= |01\rangle, \\ |\psi_{\text{after } 2, n_b=0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_L 0_U\rangle + |0_L 1_U\rangle), \end{aligned}$$

Для нас важно, что при *любом* результате измерения фотон "размазывается" между выходами и с равной вероятностью он может быть зарегистрирован обоими детекторами. Поэтому, если детектор U регистрирует фотон, то Вася будет точно знать, что измерение произошло, т.е. супер-бомба исправна и он ее может спокойно передать агенту ХХХ.

2 Двухуровневые системы

2.1 Примеры двухуровневых систем

Частица со спином $\frac{1}{2}$ в магнитном поле.
Оператор магнитного момента:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{mc} \vec{s}, \quad (2.1)$$

где \vec{s} — оператор спина (механического вращательного момента). Если частица находится в магнитном поле \vec{H} , то ее взаимодействия частицы с этим полем равен

$$\hat{H} = -(\vec{\mu} \vec{H}) = \frac{e}{mc} (\vec{s} \vec{H}). \quad (2.2)$$

Если частица, в частности электрон, имеет спин $\frac{1}{2}$, то проекция ее спина на любое заданное направление (в частности, на направление магнитного поля) может принимать только значения $\pm \frac{1}{2}$. Поэтому собственные значения энергии частицы в магнитном поле равны

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{e\hbar H}{2mc} = \pm \beta H, \quad (2.3)$$

где

$$\beta = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (2.4)$$

— магнетон Бора.

Ридберговский атом. Другим широко распространенным примером двухуровневой системы является атом, находящийся на высоком долгоживущем уровне (ридберговский атом). Обычно рассматривают два его уровня: нижний (обозначаемый g , "ground") и верхний (обозначаемый e , "excited"), интересуясь только переходами между этими уровнями под действием внешнего поля (переходы на уровни ниже уровня g или выше уровня e имеют значительно отличающуюся частоту перехода и поэтому маловероятны).

Два связанных осциллятора тоже могут рассматриваться как двухуровневая система, если по условиям они имеют один квант энергии на двоих и могут только обмениваться им (см. ниже раздел 2.5).

2.2 Спиновые операторы

2.2.1 Матрицы Паули

Поскольку собственных значений энергии и соответствующих им собственных состояний только два (двумерное гильбертово пространство), то любые операторы для двухуровневых систем могут быть представлены в виде матриц 2×2 . Если наложить еще условие эрмитовости, то общая запись таких операторов будет иметь вид (a, c — произвольные действительные числа, b — произвольное комплексное число):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} = \frac{a+c}{2} \hat{I} + \frac{a-c}{2} \hat{\sigma}_z + \Re(b) \hat{\sigma}_x + \Im(b) \hat{\sigma}_y, \quad (2.5)$$

где \hat{I} — единичная матрица, а $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — спиновые матрицы Паули:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6a)$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6b)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6c)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6d)$$

Другими словами, эти операторы образуют базис в пространстве операторов 2×2 .

Компоненты оператора спина пропорциональны матрицам Паули:

$$\hat{s}_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_{x,y,z}. \quad (2.7)$$

Собственные состояния оператора σ_z :

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Гамильтониан:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \quad (2.9)$$

$$\omega_0 = \frac{eH}{mc} \text{ — спиновая система,}$$

$$\omega_0 \text{ — частота перехода для атома.} \quad (2.10)$$

Для спиновых операторов выполняются следующие коммутационные и антикоммутационные соотношения:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sigma_k, \quad i, j, k \sim x, y, z$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij},$$

2.2.2 Операторы рождения и уничтожения фермионов

Удобно ввести следующие операторы

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11a)$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11b)$$

Это не эрмитовы операторы (аналог операторов a, a^+ для поля). Для них справедливы следующие формулы

$$\hat{\sigma}_+ |z_-\rangle = |z_+\rangle, \quad \hat{\sigma}_+ |z_+\rangle = 0, \quad (2.12a)$$

$$\hat{\sigma}_- |z_+\rangle = |z_-\rangle, \quad \hat{\sigma}_- |z_-\rangle = 0, \quad (2.12b)$$

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \sigma_z, \quad \{\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-\} = \frac{1 - \hat{\sigma}_z}{2}, \quad (2.12c)$$

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_z] = -\hat{\sigma}_+, \quad [\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = \hat{\sigma}_-, \quad (2.12d)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_0 \left(\sigma_+ \sigma_- - \frac{1}{2} \right). \quad (2.12e)$$

Из соотношений (2.12a, 2.12b) следует, что операторы σ_+ и σ_- можно рассматривать как операторы рождения и уничтожения фермионов. Кроме того, понятно, что любой оператор может быть выражен через операторы σ_+ и σ_- .

Выпишем уравнение движения:

$$i\hbar\dot{\sigma}_+ = [\sigma_+, \mathcal{H}] = \hbar\omega_0[\sigma_+, \sigma_z/2],$$

$$\dot{\sigma}_+ = i\omega_0\sigma_+, \quad \sigma_+(t) = \sigma_+ e^{i\omega_0 t}$$

$$\dot{\sigma}_- = -i\omega_0\sigma_-, \quad \sigma_-(t) = \sigma_- e^{-i\omega_0 t}$$

2.3 Атом в переменном э.м. классическом поле.

Рассмотрим атом с электрическим дипольным моментом \vec{d} (частота перехода ω_a) в переменном электрическом поле частоты ω_e направленным,

например, по оси x . Используем дипольное приближение:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} &= d_x E_0 \cos \omega_e t = d E_0 \sigma_x \cos \omega_e t = \\ &= 2\hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) \cos \omega_e t, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \hbar g &= \frac{d_0 E_0}{2}, \\ \dot{\sigma}_+ &= i\omega_a \sigma_+ - 2ig\sigma_z \cos \omega_e t, \\ \sigma_+ &\rightarrow \sigma_+ e^{i\omega_a t}, \\ \dot{\sigma}_+ &= -ig\sigma_z e^{i(\omega_e - \omega_a)t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_- &= -i\omega_a \sigma_- + 2ig\sigma_z \cos \omega_e t, \\ \sigma_- &\rightarrow \sigma_- e^{-i\omega_a t}, \\ \dot{\sigma}_- &= ig\sigma_z e^{-i(\omega_e - \omega_a)t} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Мы видим, что уравнения для операторов σ_{\pm} нелинейны.

Рассмотрим эволюцию состояния, заданного вектором $|\psi\rangle = \psi_+|z_+\rangle + \psi_-|z_-\rangle$. Выпишем уравнение уравнение Шредингера в компонентах (здесь, естественно, $\psi_+ = \psi_+(t)$ и $\psi_- = \psi_-(t)$ есть с-числа):

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t|\psi\rangle &= \mathcal{H}|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \psi_+|z_+\rangle + \psi_-|z_-\rangle \\ \mathcal{H} &= \hbar\omega_a \frac{\sigma_z}{2} + 2\hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) \cos \omega_e t, \\ i\dot{\psi}_+ &= \frac{\omega_a}{2} \psi_+ + 2g\psi_- \cos \omega_e t, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$i\dot{\psi}_- = -\frac{\omega_a}{2} \psi_- + 2g\psi_+ \cos \omega_e t, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \chi_+ e^{i\omega_a t/2}, \quad \psi_- = \chi_- e^{-i\omega_a t/2}, \\ i\dot{\chi}_+ &= g\chi_- e^{i(\omega_e - \omega_a/2)t}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$i\dot{\chi}_- = g\chi_+ e^{-i(\omega_e - \omega_a/2)t} \quad (2.20)$$

В последних уравнениях мы отбросили члены $\sim e^{\pm(\omega_e + \omega_a/2)t}$. В резонансном случае $\omega_a = \omega_e$ можно сразу выписать решение:

$$\begin{aligned} \chi_+ &= Ae^{igt} + Be^{-igt}, \\ \chi_- &= -Ae^{igt} + Be^{-igt} \end{aligned}$$

Для наиболее наглядного случая, когда первоначально атом находился, например, в состоянии $|z_+\rangle$ (т.е. $\chi_+(0) = 1$, $\chi_-(0) = 0$) получаем:

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \cos gt, \\ \chi_- &= -i \sin gt \end{aligned}$$

Величину g называют частотой Раби. На рис. 2 представлена зависимость населенностей верхнего и нижнего уровней атома для этого частного случая. (Иногда частотой Раби называют величину $2g$.)

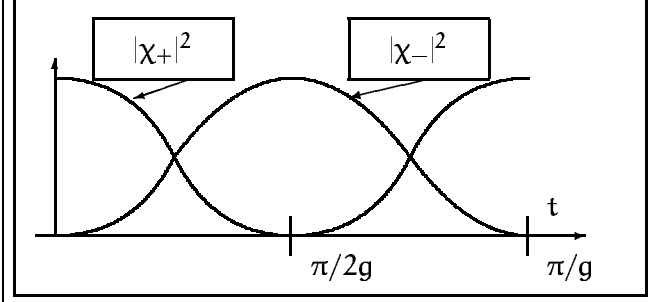


Рис. 2: Зависимость населенностей верхнего и нижнего уровней атома в резонансном э.м. поле. Первоначально атом находился на верхнем уровне ($\chi_+(0) = 1$, $\chi_-(0) = 0$).

2.4 Атом в переменном э.м. квантовом поле.

Рассмотрим атом в квантовом поле, точнее атом в квантовом э.м. резонаторе (без потерь). Частота перехода атома ω_a , частота резонатора ω_e , объем резонатора V .

Гамильтониан. Выпишем гамильтониан системы:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{H}_A = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z, \quad \mathcal{H}_e = \hbar\omega_e \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \hat{d} \hat{E}(t), \quad (2.22)$$

$$\hat{d} = d_0(\sigma_+ + \sigma_-), \quad (\text{диполь - по оси } x),$$

$$\hat{E} = E_0(a^+ + a^-), \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_e}{V}}$$

$$\left\{ \frac{\hat{E}^2 V}{4\pi} = \frac{E_0^2 V 2a^+ a}{4\pi} = \hbar\omega_e a^+ a \right\},$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = d_0(\sigma_+ + \sigma_-) E_0(a^+ + a^-) =$$

rotating wave approximation:

$$\simeq \hbar k(a^+ \sigma_- + a \sigma_+), \quad k = \frac{E_0 d_0}{\hbar}, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar\omega_e \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \hbar k(a^+ \sigma_- + a \sigma_+). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Уравнения для операторов (в представлении Гейзенберга) будут нелинейными. Поэтому рассмотрим решение уравнения Шредингера. Очевидно, что атом может быть либо в верхнем, либо в нижнем состоянии, а полное число квантов в системе постоянно.

Решение уравнение Шредингера будем искать в виде (здесь опять $\psi_+ = \psi_+(t)$ и $\psi_- = \psi_-(t)$ — с-числа):

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \psi_+|z_+\rangle|n-1\rangle + \psi_-|z_-\rangle|n-1\rangle = \\ &= \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Выпишем отдельно члены:

$$\begin{aligned} 1) : \quad \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} = \\ = \frac{\hbar\omega_a}{2} \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ -\psi_-|n\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) : \quad \hbar\omega_e a^+ a \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} = \\ = \hbar\omega_e \begin{pmatrix} (n-1)\psi_+|n-1\rangle \\ n\psi_-|n\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) : \quad \hbar k(a^+ \sigma_- + a \sigma_+) \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} = \\ = \hbar k \begin{pmatrix} \sqrt{n}\psi_-|n-1\rangle \\ \sqrt{n}\psi_+|n\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Собираем все члены в уравнении (2.25) "построчно" и получаем:

$$\begin{aligned} i\dot{\psi}_+ &= \left[\frac{\omega_a}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) \omega_e \right] \psi_+ + \sqrt{n} k \psi_-, \\ i\dot{\psi}_- &= \left[-\frac{\omega_a}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_e \right] \psi_- + \sqrt{n} k \psi_+. \end{aligned}$$

Полагаем, что частоты атома и резонатора близки, но не равны:

$$\omega_a = \omega_e + 2\delta, \quad \delta \ll \omega_e.$$

Тогда получаем:

$$\dot{\psi}_+ = -i(n\omega_e + \delta)\psi_+ - i\sqrt{n}k\psi_-, \quad (2.27)$$

$$\dot{\psi}_- = -i(n\omega_e - \delta)\psi_- - i\sqrt{n}k\psi_+. \quad (2.28)$$

$$\psi_{\pm} = \chi_{\pm} e^{-in\omega_e t}, \quad (2.29)$$

$$\dot{\chi}_+ = -i\delta\chi_+ - i\sqrt{n}k\chi_-, \quad (2.30)$$

$$\dot{\chi}_- = +i\delta\chi_- - i\sqrt{n}k\chi_+. \quad (2.31)$$

в простейшем случае резонанса $\delta = 0$ получаем систему, которая была уже решена в конце раздела 2.3 (см. (2.19, 2.20)) и мы можем сразу написать решение для случая, когда первоначально

атом находился, например, в состоянии $|z_+\rangle$ (т.е. $\chi_+(0) = 1, \chi_-(0) = 0$):

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \cos G_n t, \quad G_n = k\sqrt{n} \\ \chi_- &= -i \sin G_n t \end{aligned}$$

Частоту G_n называют n -квантовой частотой Раби. Зависимость населенностей от времени будет та же, что и на рис. 2 с очевидной заменой: $g \rightarrow G_n$.

Подчеркнем, что в рассмотренном случае полное количество квантов в системе фиксировано. Например, мы можем представить ситуацию, когда в резонатор, первоначально находящийся в n -состоянии, влетает атом и через некоторое время вылетает. Тогда по приведенным выше формулам можно легко рассчитать конечные состояния атома и резонатора и наблюдать отчетливые биения Раби. Однако, если резонатор находился не в n -состоянии (которое не так просто получить экспериментально), а в обычном когерентном состоянии (суперпозиция n -состояний), то биения с разными частотами G_n будут накладываться и конечное состояние системы "атом+резонатор" будет более экзотическим. Конечно, не представляет труда точно рассчитать такое конечное состояние, но, очевидно, что вряд ли стоит надеяться получить отчетливую картину биений.

Нерезонансный случай: $\delta \neq 0$. Ищем решение в виде $\chi_{\pm} \rightarrow \chi_{\pm} e^{\lambda t}$. Подставляя в систему (2.30,

2.31), получаем характеристическое уравнение:

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} \lambda + i\delta & -ik\sqrt{n} \\ -ik\sqrt{n} & \lambda - i\delta \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + \delta^2 + k^2n,$$

$$\lambda = \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\delta^2 + k^2n},$$

$$\chi_+(t) = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}, \quad (2.32)$$

$$\chi_-(t) = Ce^{i\Omega t} + De^{-i\Omega t}, \quad (2.33)$$

$$C = -\frac{\delta + \Omega}{k\sqrt{n}} A,$$

$$D = -\frac{\delta - \Omega}{k\sqrt{n}} A,$$

$$\chi_+(0) = 1 \rightarrow B = 1 - A, \quad (2.34)$$

$$\chi_-(0) = 0 \rightarrow D = -C, \quad (2.35)$$

$$(2.30, 2.31) : C = -\frac{\Omega + \delta}{k\sqrt{n}} A, \quad D = \frac{k\sqrt{n}}{\Omega + \delta} B,$$

$$(2.35) : B = \left(\frac{\Omega + \delta}{k\sqrt{n}}\right)^2 A, \quad (2.36)$$

$$(2.34, 2.36) : A = \frac{k^2n}{(\Omega + \delta)^2 + k^2n}, \quad (2.37)$$

$$B = \frac{(\Omega + \delta)^2}{(\Omega + \delta)^2 + k^2n}, \quad (2.38)$$

$$C = -\frac{k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2n}, \quad (2.39)$$

$$D = \frac{k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2n}. \quad (2.40)$$

Используя эти выражения, можно выписать решение:

$$\chi_+ = \cos \Omega t + i \frac{k^2n - (\Omega + \delta)^2}{(\Omega + \delta)^2 + k^2n} \sin \Omega t,$$

$$\chi_- = -i \frac{k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2n} \sin \Omega t.$$

Из вида этого решения видим, что в случае резонанса ($\delta = 0$) мы получаем полные биения Раби — 100% модуляция. В случае конечной расстройки величина максимальной населенности нижнего уровня меньше единицы:

$$|\chi_-|^2 \leq \left(\frac{k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2n}\right)^2 = \frac{k^2n}{4\Omega^2}$$

Это показано на рис. 3.

2.5 Два связанных осциллятора

Рассмотрим еще один пример двухуровневой системы — два связанных осциллятора с одним

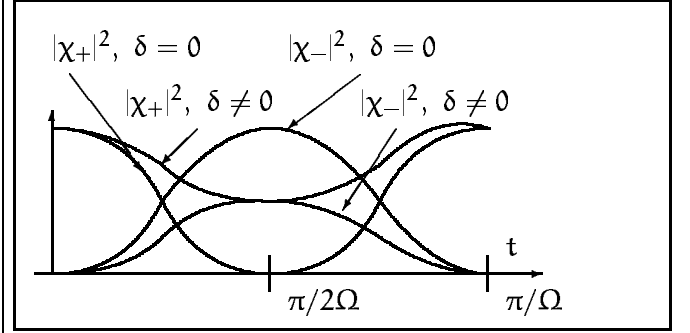


Рис. 3: Зависимость населенностей верхнего и нижнего уровней атома в квантовом резонаторе при произвольной расстройке δ . Первоначально атом находился на верхнем уровне ($\chi_+(0) = 1$, $\chi_-(0) = 0$).

квантом на двоих. Выписываем гамильтониан и эволюцию состояния:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}},$$

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\omega_0(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1), \quad (2.41)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\hbar g(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \quad (2.42)$$

$$|\Psi\rangle = \psi_+|01\rangle + \psi_-|10\rangle, \quad (2.43)$$

$$i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}})|\Psi\rangle,$$

$$\mathcal{H}_0|\Psi\rangle = 2\hbar\omega_0|\Psi\rangle, \quad (2.44)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}}|\Psi\rangle = -\hbar g(\psi_+|10\rangle + \psi_-|01\rangle), \quad (2.45)$$

Гамильтониан взаимодействия (2.42) соответствует ситуации, когда общее число квантов сохраняется (воздействия, приводящие к рождению новых квантов в системе мы исключаем), мы можем записать гамильтониан двух связанных осцилляторов в "двухуровневом" виде:

$$\mathcal{H} = 2\hbar\omega_0\hat{\Gamma} - \hbar g\hat{\sigma}_x \quad (2.46)$$

Очевидно, что первый член может быть благополучно опущен.

3 Квантовый парадокс Зенона

3.1 Точное измерение

Это — красивый эффект, демонстрирующий характерные особенности квантовой механики, точнее квантовой теории измерений. Вначале он назывался квантовый парадокс Зенона или эффект сторожевой собаки и понимался как демонстрация странности и неполноты квантовой теории. Позже к нему стали относиться более спокойно просто как к еще одному на первый взгляд парадоксальному следствию квантовой механики и наблюдали экспериментально.

Рассмотрим квантовый осциллятор, который первоначально находился в энергетическом состоянии $|\psi\rangle = |n\rangle$. Пусть на осциллятор воздействует что-то (например, сила), что может вызвать переходы на другие уровни и пусть это воздействие описывается известным гамильтонианом \mathcal{H} . Решаем уравнение Шредингера, разлагая решение в ряд и выписывая вероятность $W_{nn}(\theta)$ того, что осциллятор останется в n -состоянии через время θ :

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle, \quad (3.1)$$

$$|\psi(0)\rangle = |n\rangle,$$

$$\begin{aligned} |\psi(\theta)\rangle &= \exp\left(\frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar}\right)|n\rangle \approx \\ &= \left(1 + \frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar}\right]^2\right)|n\rangle, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} W_{nn}(\theta) &= |\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle = \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{\hbar^2}\left(\langle n|\mathcal{H}^2|n\rangle - \langle n|\mathcal{H}|n\rangle^2\right) = \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{\hbar^2}(\Delta\mathcal{E})^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, если через время θ мы измерим номер уровня (т.е. энергию осциллятора), то с вероятностью $W_{nn}(\theta)$ мы обнаружим осциллятор на начальном уровне n . Пусть через время θ мы опять измерим энергию осциллятора, и так будем измерять ее k раз в течение времени $\tau = k\theta$. Посчитаем вероятность того, что в конце концов осциллятор останется в n -состоянии (произведение

вероятностей):

$$\begin{aligned} W_{nn}(k\theta) &= [W_{nn}(\theta)]^k = \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{\hbar^2}(\Delta\mathcal{E})^2\right)^{k\theta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В пределе $\theta \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ (τ - постоянно):

$$\begin{aligned} W_{nn}(k\theta) &\rightarrow \exp\left(-\frac{\tau\theta}{\hbar^2}(\Delta\mathcal{E})^2\right) \rightarrow 1. \quad (3.5) \\ &\left\{\lim_{x \rightarrow 0}(1 + ax)^{1/x} = e^a\right\}. \end{aligned}$$

Получили, что при частом измерении энергии осциллятор *не переходит (!)* с начального уровня¹. Причина заключается в том, что при каждом измерении мы нарушаем когерентность воздействия (сбиваем фазу). поясним это с помощью классической аналогии.

Классическая аналогия. Подчеркнем, что приводимые ниже рассуждения ни в коем случае не являются доказательством, а служат лишь аналогией (анalogии — это костыли, на которые опирается здравый смысл, не в силах постичь абстракцию).

Пусть на механический осциллятор (масса m , частота ω_m) действует классическая резонансная сила $F = F_0 \cos \omega_m t$. Известно, что действие такой силы в течение времени вызовет колебания

$$x(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_m} \sin \omega_m t$$

Теперь представим себе, что через время θ фаза осциллятора сбивается. При измерении энергии осциллятора он переходит в энергетическое состояние, в котором фаза полностью не определена. Поэтому условие потери фазы является классической аналогией измерения энергии. Далее предположим, что мы сбиваем фазу осциллятора k раз в течение времени $\tau = k\theta$. Тогда естественно, что в течение каждого отрезка θ амплитуда колебаний осциллятора будет получать *случайное приращение* величины Δx_θ , а полная амплитуда через время τ будет равна:

$$\Delta x_\theta = \frac{F_0 \theta}{2m\omega_m}, \quad (3.6)$$

$$\sqrt{\langle x^2(\tau) \rangle} = \Delta x_\theta \sqrt{\frac{\tau}{\theta}} = \frac{F_0 \sqrt{\tau \theta}}{2m\omega_m} \quad (3.7)$$

¹В качестве шутки физики приводят "чайный" парадокс Зенона: если часто проверять чайник на плите, он никогда не закипит.

Заметим, что при стремлении $\theta \rightarrow 0$ при конечном τ амплитуда колебаний $\sqrt{\langle x^2(\tau) \rangle} \rightarrow 0$ (!). Таким образом часто сбивая фазу, мы не даем развиться резонансу и можем полностью его затормозить.

Еще раз подчеркнем, что это лишь аналогия (ведь с точки зрения классики здесь нет ничего необычного).

3.2 Элементы теории непрерывных квантовых измерений

Для более строгого анализа необходимы сведения из теории измерения и в этом разделе мы рассмотрим вывод уравнения для матрицы плотности системы, в которой непрерывно измеряется некоторая наблюдаемая \hat{q} .

О селективном и неселективном подходе к описанию измерения При рассмотрении квантовых измерений, в зависимости от того, какие именно детали поведения участвующих в измерении квантовых систем нас интересуют, используются два подхода — более простой неселективный и более сложный селективный. Чтобы уяснить разницу между ними, рассмотрим простой пример.

Пусть имеется квантовая частица, приготовленная в состоянии со средними значениями координаты и импульса $\langle x \rangle_0$ и $\langle p \rangle_0$ и неопределенностями этих наблюдаемых $(\Delta x)_0$ и $(\Delta p)_0$. Пусть затем у этой частицы измеряется координата с ошибкой $(\Delta x)_{\text{meas}}$. Будем считать для простоты, что $(\Delta x)_{\text{meas}} \ll (\Delta x)_0$. Импульс при этом, естественно, возмущается на величину $(\Delta p)_{\text{pert}} \approx \hbar/2(\Delta x)_{\text{meas}} \gg (\Delta p)_0$.

Каковы будут средние значения и неопределенности координаты и импульса этой частицы после измерения?

Ответ на этот вопрос будет разным для разных наблюдателей. Для человека, который узнал показание измерителя (равное, например, x_1), среднее значение координаты частицы после измерения будет близко к x_1 , среднее значение импульса останется равным $\langle p \rangle_0$, а неопределенности этих величин будут близки к $(\Delta x)_{\text{meas}}$ и $(\Delta p)_{\text{pert}}$.

В то же время для человека, который знает, что измерение произведено, знает начальное состояние частицы и параметры измерителя, но не знает, какой результат был получен при измерении,

средние значения координаты и импульса останутся прежними, $\langle x \rangle_0$ и $\langle p \rangle_0$, неопределенность координаты также не изменится и останется равной $(\Delta x)_0$, а неопределенность импульса возрастет и станет примерно равной $(\Delta p)_{\text{pert}}$.

Описание измерения, соответствующее информации, имеющейся у первого наблюдателя, то есть учитывающее полученный при измерении результат, называется селективным, а то, которое соответствует информации, имеющейся у второго наблюдателя — неселективным.

Можно показать, что если частица до измерения находилась в чистом состоянии, и измерение было идеальным (то есть все вносимые им неопределенности были чисто квантовыми), то для первого наблюдателя частица после измерения перейдет в также чистое состояние $|\psi(x_1)\rangle$, зависящее, естественно, от полученного результата измерения x_1 .

Для второго наблюдателя состояние частицы в результате измерения станет смешанным и равным

$$\hat{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1) |\psi(x_1)\rangle \langle \psi(x_1)| dx_1, \quad (3.8)$$

где $w(x_1)$ — априорная вероятность получить при измерении результат x_1 . Для него все возможные результаты измерения как бы оказываются свалены в общую кучу, отсюда название "неселективный подход".

Уравнение для матрицы плотности. Пусть измерения наблюдаемой q нашей системы, описываемой гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}$ происходят с интервалом θ в моменты времени $t_1, t_2 \dots t_i, t_{i+1}, \dots$. Эта последовательность измерений перейдет в непрерывное измерение в пределе $\theta \rightarrow 0$.

Рассмотрим переход системы от момента времени t_j к моменту t_{j+1} . На этом интервале ее гамильтониан равен

$$\hat{H}_j = \hat{\mathcal{H}}_j - q u_j. \quad (3.9)$$

Здесь $\hat{\mathcal{H}}_j$ — гамильтониан, описывающий эволюцию изолированной системы, $\hat{q} \hat{u}_j$ — связь с измерителем, \hat{u}_j — переменная квантовой считывающей системы (КСС), которая разрушающим образом измеряется. Здесь зависимость $\hat{\mathcal{H}}_j$ от индекса j отражает возможную зависимость от времени.

При измерении нельзя использовать описание с помощью волновой функции (т.к. нас будет интересовать результат эволюции, усредненный по

КСС) этот момент — различие между селективным и неселективным подходами — вызывает всегда проблемы, и его надо бы изложить подробнее, поэтому надо пользоваться матрицей плотности. Запишем матрицу плотности в момент времени t_j в виде разложения по собственным векторам $|\psi_k\rangle$ наблюдаемой \hat{q} , эволюцию описываем с помощью оператора эволюции \hat{U}_j , который раскладываем в ряд:

$$\hat{\rho}_j = \text{Sp}_{\text{КСС}} \left(\sum_{k,m} |\psi_k\rangle \rho_{km}^{(j)} \langle \psi_m| \right),$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{j+1} &= \text{Sp}_{\text{КСС}} \left(\sum_{k,m} \hat{U}_j |\psi_k\rangle \rho_{km}^{(j)} \langle \psi_m| \hat{U}_j^+ \right) \\ &= \text{Sp}_{\text{КСС}} (\hat{U}_j \hat{\rho}_j \hat{U}_j^+), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_j &= \exp \left(\int \frac{\hat{H}_j}{i\hbar} dt \right) \approx 1 + \hat{H}_j \frac{\theta}{i\hbar} - \hat{H}_j^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \\ &= 1 + (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \frac{\theta}{i\hbar} - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{j+1} &= (\hat{U}_j \hat{\rho}_j \hat{U}_j^+) \\ &\approx \left(1 + \hat{H}_j \frac{\theta}{i\hbar} - \hat{H}_j^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right) \hat{\rho}_j \left(1 - \hat{H}_j \frac{\theta}{i\hbar} - \hat{H}_j^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right) \\ &= \left(1 + (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \frac{\theta}{i\hbar} - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right) \hat{\rho}_j \\ &\quad \times \left(1 - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \frac{\theta}{i\hbar} - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right), \end{aligned}$$

$$\langle \hat{y}_j \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{j+1} &= \hat{\rho}_j + \frac{\theta}{i\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_j, \hat{\rho}_j] \\ &\quad - \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \left([\hat{\mathcal{H}}_j, [\hat{\mathcal{H}}_j, \hat{\rho}_j]] + \langle \hat{y}^2 \rangle [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{\rho}_j]] \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теперь мы можем перейти к пределу для непрерывного измерения:

$$\theta \rightarrow 0, \quad (3.11a)$$

$$\frac{\hat{\rho}_{j+1} - \hat{\rho}_j}{\theta} \rightarrow \partial_t \hat{\rho}, \quad (3.11b)$$

$$\theta \langle \hat{y}^2 \rangle \rightarrow \sigma_F^2(t), \quad (3.11c)$$

и переписать уравнения (3.10):

$$\partial_t \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}] - \frac{\sigma_F^2(t)}{2\hbar^2} [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{\rho}]] \quad (3.12)$$

Пределный переход (3.11) означает, что непрерывное измерение можно представить как последовательность неточных, но часто повторяющихся измерений. При конечном времени измерения это дает конечную точность (это описывается конечной величиной σ_F).

Физический смысл σ_F . Рассмотрим физический смысл величины σ_F . Для этого вернемся к дискретному описанию и вычислим как изменился импульс \hat{p}_j после j -ого измерения (мы опускаем в операторе эволюции член $\sim \mathcal{H}_j$, интересуясь лишь отклонением от свободной эволюции):

$$\begin{aligned} \hat{p}_{j+1} &= \hat{U}_j^+ \hat{p}_j \hat{U}_j \simeq \\ &\simeq \left(1 + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q}\hat{y}_j \right) \hat{p}_j \left(1 - \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q}\hat{y}_j \right) \simeq \\ &\simeq \hat{p}_j + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{y}_j \underbrace{[\hat{q}, \hat{p}_j]}_{=i\hbar} = \hat{p}_j + \theta \hat{y}_j, \\ \Delta p_j^2 &= \langle (p_{j+1} - p_j)^2 \rangle = \theta \sigma_F, \\ &\quad \langle \hat{y}_j \hat{y}_i \rangle = \theta \sigma_F \delta_{ij}, \\ \theta &\rightarrow 0, \quad \partial_t \hat{p} = \hat{y}, \\ &\quad \langle \hat{y}(t) \hat{y}(t') \rangle = \sigma_F \delta(t - t') \end{aligned}$$

Мы видим, что параметр σ_F описывает белый шум обратного флуктуационного влияния.

Для того чтобы выяснить как параметр σ_F связан с ошибкой измерения, рассмотрим эволюцию в КСС. Пусть \hat{y}_j координата, а \hat{Y}_j — импульс в КСС. Опять вернемся к дискретному описанию и вычислим как изменился импульс \hat{Y}_j после j -ого измерения:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{j+1} &= \hat{U}_j^+ \hat{Y}_j \hat{U}_j \simeq \\ &\simeq \left(1 + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q}\hat{y}_j \right) \hat{Y}_j \left(1 - \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q}\hat{y}_j \right) \simeq \\ &\simeq \hat{Y}_j + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q} \underbrace{[\hat{y}_j, \hat{Y}_j]}_{=i\hbar} = \hat{Y}_j + \theta \hat{q}, \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что ошибка измерения Δq связана с неопределенностью импульса ΔY_j :

$$(\Delta q)^2 = \frac{(\Delta Y_j)^2}{\theta^2}.$$

В пределе $\theta \rightarrow 0$ получаем ошибку измерения за конечное время t :

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow 0, \\ (\Delta q)_t^2 &= \frac{(\Delta Y)^2}{\theta^2} \times \frac{\theta}{t} = \frac{(\Delta Y)^2}{\theta t} = \\ &= \frac{\hbar^2}{4\langle y^2 \rangle \theta t} = \frac{\hbar^2}{4\sigma_F^2 t} = \frac{\sigma_q^2}{t}\end{aligned}$$

Здесь параметр σ_q описывает шумы измерения. Постоянная величина σ_q это соответствует белым шумам измерения. Из последнего равенства также следует соотношение неопределенностей для непрерывного измерения:

$$\sigma_q \sigma_F \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.13)$$

3.3 Парадокс Зенона в двух-уровневой системе

Рассмотрим парадокс Зенона для двухуровневой частицы, находящейся в классическом резонансном поле.

Используя обозначения и результаты раздела 2.3, выпишем сразу гамильтониан и эволюцию состояния:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \\ \mathcal{H}_0 &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \\ \mathcal{H}_{\text{int}} &= 2\hbar g \sigma_x \cos \omega_0 t, \\ |\Psi(0)\rangle &= \psi_+ |z_+\rangle + \psi_- |z_-\rangle, \\ |\Psi(t)\rangle &= \mathbf{U} |\Psi(0)\rangle, \\ \mathbf{U} |z_+\rangle &= \cos gt |z_+\rangle + i \sin gt |z_-\rangle, \quad (3.14) \\ \mathbf{U} |z_-\rangle &= \cos gt |z_-\rangle + i \sin gt |z_+\rangle, \quad (3.15)\end{aligned}$$

Теперь включаем измерение — пусть мы измеряем величину σ_z . Тогда имеем уравнение для матрицы плотности (3.12):

$$\partial_t \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}] - \frac{\sigma_F^2(t)}{2\hbar^2} [\hat{\sigma}_z, [\hat{\sigma}_z, \hat{\rho}]] \quad (3.16)$$

Ищем матрицу плотности $\hat{\rho}$ в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \rho_x \hat{\sigma}_x + \rho_y \hat{\sigma}_y + \rho_z \hat{\sigma}_z)$$

Рис. 4: Зависимость населенности верхнего уровня двух-уровневой системы при различных параметрах τ_0

(ρ_x, ρ_y, ρ_z — с-числа) и подставляем в (3.16):

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_x \hat{\sigma}_x + \dot{\rho}_y \hat{\sigma}_y + \dot{\rho}_z \hat{\sigma}_z &= \\ &= 2g (-\rho_y \hat{\sigma}_z + \rho_z \hat{\sigma}_y) - \\ &\quad - \frac{2}{\tau_0} (\rho_x \hat{\sigma}_x + \rho_y \hat{\sigma}_y), \\ \frac{1}{\tau_0} &= \frac{\sigma_F^2(t)}{\hbar^2}\end{aligned}$$

Приравнивая члены с одинаковыми σ , получаем систему уравнений:

$$\dot{\rho}_x = -\frac{2\rho_x}{\tau_0}, \quad (3.17)$$

$$\dot{\rho}_y = -\frac{2\rho_y}{\tau_0} + 2g\rho_z, \quad (3.18)$$

$$\dot{\rho}_z = -2g\rho_y. \quad (3.19)$$

В общем случае матрица плотности описывается через числа ρ_i следующим образом:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \rho_z & \rho_x - i\rho_y \\ \rho_x + i\rho_y & \frac{1}{2} - \rho_z \end{pmatrix}$$

Нас интересует вероятность нахождения на верхнем уровне, если и первоначально система была на верхнем уровне:

$$\rho_z(0) = \frac{1}{2}, \quad \rho_x = \rho_y = 0$$

Тогда получаем, что $\rho_x(t) = 0$ и, используя (3.18), (3.19), получаем уравнение

$$\ddot{\rho}_z + \frac{1}{\tau_0} \dot{\rho}_z + 4g^2 \rho_z = 0$$

Это уравнение колебаний с частотой $2g$ и временем релаксации τ_0 . Напомним, что время τ_0 характеризует ошибку измерения. Для случая малого $\tau_0 \ll 1/2g$ (это означает измерение с малой точностью) получаем:

$$2g\tau_0 \ll 1, \quad \Omega = \sqrt{4g^2 - \frac{1}{\tau_0^2}}, \quad (3.20)$$

$$\rho_z = \frac{1}{2} \left(\cos \Omega t + \frac{\sin \Omega t}{\tau_0} \right) e^{-t/\tau_0}. \quad (3.21)$$

Для противоположного случая большого $\tau_0 \ll 1/2g$ (это означает измерение с большой точностью) получаем:

$$2g\tau_0 \gg 1, \quad (3.22)$$

$$\rho_z = \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}}{\tau_1 - \tau_2}, \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} - \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - 4g^2}, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_0} + \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - 4g^2}. \quad (3.25)$$

На рис. 4 даны графики зависимости эволюции населенности верхнего уровня в зависимости от точности измерения. Видно, что при увеличении точности измерения ($\tau_0 \rightarrow 0$) система сколь угодно долго остается на верхнем уровне.

4 Парадокс ЭПР

4.1 Качественное рассмотрение

Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена [7] был формулирован дабы продемонстрировать, что вероятностное описание квантовой механики можно заменить существованием скрытых параметров (как известно, этого сделать нельзя).

Пусть мы имеем две частицы 1, координата и импульс (рассматриваем одномерный случай) которой описываются гейзенберговскими операторами \hat{x}_1 и \hat{p}_1 , Эти операторы не коммутируют

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\hbar, \quad (4.1)$$

поэтому неопределенности координаты Δx_1 и импульса Δp_1 подчиняются соотношению неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x_1 \Delta p_1 \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (4.2)$$

т.е. координата и импульс не могут быть заданы (измерены) точно одновременно. Подчеркнем, что соотношение неопределенности (4.2) есть следствие того, что коммутатор (4.1) не равен нулю.

Пусть теперь мы имеем вторую частицу операторы координаты и импульса которой обозначим через \hat{x}_2 и \hat{p}_2 соответственно. Они подчиняются такому же соотношению неопределенности поскольку их коммутатор $[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar$ не равен нулю.

Однако заметим, что операторы $\hat{p}_+ = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$ и $\hat{x}_- = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ коммутируют друг с другом:

$$[\hat{x}_-, \hat{p}_+] = [\hat{x}_1, \hat{p}_1] - [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = 0$$

Но тогда можно задать такое *совместное* состояние двух частиц, что в начальный момент (а следовательно, и во все последующие)

$$\Delta x_- = 0, \quad \Delta p_+ = 0.$$

Таким образом мы задали *коррелированное* квантовое состояние. Такие состояния получили в литературе название переплетенных или перепутанных (*entangled states*). Заметим, что для каждой отдельно взятой частицы, например, частицы 1, неопределенности Δx_1 , Δp_1 конечны и не равны нулю.

Рассуждения в работе [7] были следующие. Пусть мы имеем такое переплетенное состояние двух частиц, которые в начальный момент находятся рядом, со временем удаляются друг от друга

и в конце расходятся на значительное расстояние. Затем мы измеряем точно, допустим, импульс частицы 1. Но из-за наличия корреляции (переплетенности) мы получаем *точную* информацию об импульсе частицы 2. Если теперь одновременно с первым измерением мы точно измеряем координату частицы 2, то в результате будем знать точно координату и импульс частицы 2, что противоречит соотношению неопределенности (4.2).

Детальный анализ на основе теории квантовых измерений показывает, что нарушения принципа неопределенности в такой схеме не происходит. Однако наличие *мгновенного* изменения волновой функции частицы 2 приводит к мысли, что, возможно, описание состояния с помощью волновой функции *не полно*. Поэтому по мысли авторов [7] должны существовать какие-то *скрытые параметры*, которые более полно, чем квантовая механика будут описывать эксперимент.

Рассмотрим этот парадокс на более простом примере, предложенном Бомом [8] и допускающем более простой математический анализ. Пусть рождается пара частиц А и В со спином 1/2, причем суммарный спин пары равен нулю. После того, как частицы родились, они разлетаются на большое расстояние. После этого экспериментатор может производить измерение какой-либо величины каждой из частиц.

Если, например, измерена проекция спина частицы А, то это означает, что проекция спина частицы В стала точно известна.

Рассуждения Ейнштейна, Подольского и Розена опираются на следующие утверждения:

- 1) *Полная антикорреляция*: Направления спинов частиц А и В противоположны.
- 2) *Локальность*: Во время измерения частицы не взаимодействуют, поэтому не может иметь места никакое реальное изменение состояния частицы В из-за того, что произведено измерение над частицей А.
- 3) *Причинность (Reality)*: Если, не возмущая состояние частицы, мы можем точно (с вероятностью 1) предсказать значение физической величины этой частицы, то должен существовать элемент физической реальности, соответствующий этой физической величине.
- 4) *Полнота*: Каждый элемент физической реальности должен соответствовать определен-

ной величине в физической теории.

Тогда, опираясь на эти утверждения, можно рассуждать следующим образом. Если экспериментатор измеряет проекцию спина частицы А, то он точно знает и проекцию спина частицы В (антикорреляция). Из-за принципа локальности измерение над частицей А не должно изменить состояние частицы В. Следовательно, из-за причинности (reality) спин частицы В есть элемент физической реальности. Но это утверждение относится к проекции на любую ось спина частицы В. Однако, нельзя указать такого состояния частицы В, в котором все проекции спина были бы определены. Следовательно, опираясь на принцип полноты, можно утверждать, что квантовая механика не является полной теорией, поскольку пара наших частиц является элементом физической реальности, для которой квантовая механика не предполагает наличие физической величины. Поэтому должна существовать другая (полная) теория, которая лишена этих недостатков. Должны быть какие-то *скрытые* параметры, которые дают непротиворечивое описание. Таков ход рассуждений работы [7].

Рассмотрим, как описывает эту ситуацию квантовая механика. Известно, что проекция спина каждой частицы на какую-нибудь заранее выбранную ось (пусть это будет ось z) может иметь только два значения. Состояния, например, частицы А будем обозначать $|z_+^A\rangle$, $|z_-^A\rangle$. Состояние двух частиц с полностью антикоррелированными спинами называется *синглетным ЭПР-состоянием* и записывается в виде:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|z_+^A z_-^B\rangle - |z_-^A z_+^B\rangle \right) \quad (4.3)$$

Заметим, что вид записи такого состояния инвариантен относительно базиса, т.е. если записать состояние (4.3) в другом базисе, например, через состояния $|x_+^A\rangle$, $|x_-^A\rangle$, то оно будет иметь вид $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x_+^A x_-^B\rangle - |x_-^A x_+^B\rangle \right)$.

Можно показать (см. Приложение Б), что если мы будем измерять проекции спина на произвольную ось у одной и другой частиц, то получим полную антикорреляцию. Например, если измерять проекцию спина на ось x, то получим следующие

амплитуды вероятности

$$\langle x_+^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle x_-^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (4.4)$$

$$\langle x_+^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.5)$$

$$\langle x_-^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}. \quad (4.6)$$

Поэтому мы можем сделать вывод, что состояние (4.3) действительно соответствует полностью антикоррелированным спинам: проекция суммарного спина на *любую* ось равна нулю.

Такое состояние называется перепутанным (entangled state), поскольку это состояние не может быть представлено в виде произведения двух векторов, каждый из которых описывает только одну частицу.

Вернемся к измерениям. Измеряя проекцию спина частицы А на ось z, я получу либо +1 либо -1. В результате измерения произойдет *редукция* волновой функции. Пусть после измерения мы получили +1. Тогда состояние системы двух частиц будет описываться с помощью проекционного оператора

$$\frac{1}{N} |z_+^A\rangle \langle z_+^A| | \Psi_{AB} \rangle = |z_-^B\rangle \quad (4.7)$$

(N — нормировочный множитель). Таким образом после измерения мы получили, что состояние частицы В точно определено.

Главный вопрос парадокса ЕПР касается описания процесса измерения. После измерения волновая функция частицы В кардинально изменилась. Поэтому можно спросить, а является ли описание с помощью волновой функции полным? Нельзя ли результат эксперимента описать на классическом языке, вводя скрытый параметр?

Для ответа на этот вопрос Беллом [9] были предложены схемы экспериментов и сформулированы *неравенства Белла*, которые позволяют определить, какое описание правильно: квантово-механическое или квазиклассическое с помощью скрытых параметров. Были проведены эксперименты (см. [10] и ссылки там) которые продемонстрировали, что правильно квантово-механическое описание. Мы не будем детально останавливаться на этом, а только приведем пример, который продемонстрирует разницу между этими двумя описаниями.

4.2 Пример 1

Пусть у частицы А измеряется проекция спина на ось x, а у частицы В — на ось, которая лежит в плоскости xy и составляет угол φ с осью x. Оба измерения производятся одновременно. Каждое измерение может дать два результата: либо +1, либо -1.

Нас будут интересовать следующие величины: вероятность P₊₊ того, что оба измерения дали +1, вероятность P₋₋ (оба измерения -1), и вероятности P₋₊ и P_{+ -} (одно измерение дало +1, другое — -1).

Квантовомеханическое рассмотрение позволяет рассчитать амплитуды вероятности (Б.59) (детали см. в приложении Б), а затем посчитать вероятности и рассчитать величину:

$$S_{\text{qu}} = P_{++} + P_{--} - P_{-+} - P_{+-} = -\cos \phi \quad (4.8)$$

Теперь рассмотрим ситуацию с классических позиций. Пусть мы имеем два магнетика, магнитные моменты которых направлены произвольно, но всегда противоположно другому.

Если я измеряю проекцию момента частицы А на ось x, то в одной половине случаев я получу положительную проекцию, в другой — отрицательную. Я могу мысленно провести сферу из начала координат и считать, что концы векторов магнитного момента равномерно распределены по сфере. Тогда плоскость x = 0 будет разделять всю сферу на две равные части, на одной из которых проекция на ось x положительна, а на другой — отрицательна. Назовем эти полусферы x-полусферами.

Пусть теперь я измеряю проекцию момента частицы В на единичный вектор n_φ, лежащий в плоскости xy и составляющий угол φ с осью x. Опять в одной половине случаев я получу положительную проекцию, в другой — отрицательную. Я могу провести плоскость перпендикулярную вектору n_φ, которая будет разделять всю сферу на две равные части, на одной из которых проекция на n_φ положительна, а на другой — отрицательна. Назовем эти полусферы n_φ-полусферами.

Очевидно, что границы x-сфер и n_φ-сфер, не совпадают и делят всю сферу на участки, на которых знаки проекций частиц А и В на соответствующие оси либо одинаковые, либо разные. Эти области подобны поверхностям глобуса, ограниченными меридианами (или долькам, на которые часто нарезают арбуз). Теперь нетрудно рассчитать классический аналог (4.8):

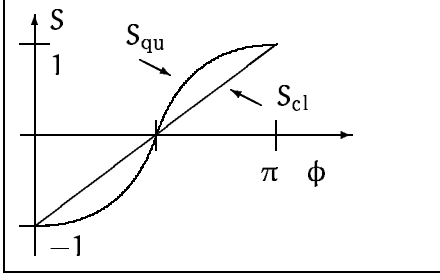


Рис. 5: Графики функций S_{qu} и S_{cl} . Очевидно, что измеряя в эксперименте величину S_{exp} , можно проверить, какое рассмотрение — квантовомеханическое или квазиклассическое соответствует эксперименту

$$S_{cl} = P_{++} + P_{--} - P_{-+} - P_{+-} = -1 + \frac{2\phi}{\pi} \quad (4.9)$$

Графики функций S_{qu} и S_{cl} приведены на рис. 5. Мы видим, что по результатам эксперимента можно сделать выбор в пользу правильного описания. Детальный анализ (см. например [11]) показывает, что рассмотрение с введением скрытых параметров дает при некоторых значениях угла ϕ меньшие значения величины S , чем предсказывает квантовая теория.

4.3 Пример 2

Рассмотрим состояние трех частиц А, В, С, которое в литературе называется GHZ- (Greenberg-Horne-Zeulinger)

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle \quad (4.10)$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов трех частиц имеем

$$\begin{aligned} \langle z_+^A z_+^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_-^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_+^A z_+^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_+^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0, \\ \langle z_+^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_-^A z_+^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Пусть эти частицы разлетаются в разные стороны и проекция спина каждой измеряются тремя разными детекторами. Если детекторы измеряют проекцию каждого спина на ось z , то нетрудно посчитать амплитуды вероятностей различных исходов и найти, что возможны только два варианта:

либо все три детектора фиксируют состояние $|z_+\rangle$, либо все три детектора фиксируют состояние $|z_-\rangle$.

Таким образом, пытаясь описать это состояние на классическом языке, мы можем сделать вывод, что состояние симметрично в том смысле, что либо все три магнетика направлены вверх, либо — вниз. При этом (опять рассуждая классически) проекции магнетиков на оси x и y , по-видимому, должны быть направлены произвольно.

Однако квантовое описание дает совершенно неожиданный результат. Пусть все три детектора регистрируют проекции спинов на ось x . Тогда можно рассчитать амплитуды вероятностей

$$\begin{aligned} \langle x_+^A x_+^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(-1)^3}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A x_+^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0 \end{aligned}$$

(Очевидно, что частицы неразличимы, и амплитуды вероятности не изменяются при заменах частиц.)

То есть возможны только следующие результаты:

- Все три частицы будут зарегистрированы в состоянии $|x_+\rangle$. (Вероятность такого исхода — $1/4$.)
- Одна частица зарегистрирована в состоянии $|x_+\rangle$, а две других — в состоянии $|x_-\rangle$. (Вероятность такого исхода — $3/4$.)
- *Никогда* не будут зарегистрированы все три частицы в состоянии $|x_-\rangle$.
- *Никогда* не будет зарегистрирована одна частица в состоянии $|x_-\rangle$, а две других — в состоянии $|x_+\rangle$

Т.е. состояние $|x_+\rangle$ может быть зарегистрировано только *нечетным* (1, 3) числом детекторов².

²Заметим, что если первоначально три частицы были в состоянии

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle, \quad (4.11)$$

то состояния $|x_+\rangle$ и $|x_-\rangle$ меняются местами, т.е. состояние $|x_-\rangle$ может быть зарегистрировано только *нечетным* (1, 3) числом детекторов.

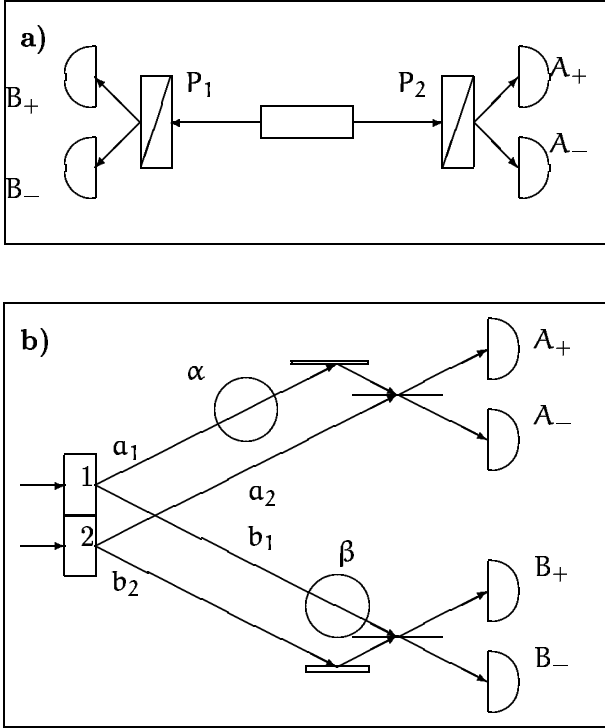


Рис. 6: Схемы оптических экспериментов по проверке неравенств Белла. Кружок означает задержку луча на фазовый угол α или β соответственно.

Очевидно, что такая несимметрия результатов не может быть объяснена классически.

4.4 Эксперимент

Подчеркнем сразу, что результаты экспериментов [10] однозначно свидетельствуют в пользу квантового описания.

Очевидно, что проводить эксперименты со спиновыми частицами крайне сложно. Вместо этого были проведены оптические эксперименты.

Ключевым элементом таких опытов является источник пар фотонов — бифотонов — который рождает коррелированные пары фотонов. Важно, чтобы в каждом импульсе было не более одного фотона. Рассмотрим, например, поляризационную схему на рис. 6б. В нелинейных кристаллах 1 и 2 фотона рождаются парами. Будем обозначать операторы уничтожения фотонов, излученных вверх, как a_1 , a_2 (индекс указывает из какого кристалла излучен фотон), а операторы уничтожения фотонов, излученных вниз, как b_1 , b_2 . Тогда состояние поля сразу после излучения из

кристалла, можно записать как

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{init}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^+ b_1^+ + a_2^+ b_2^+) |0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle_a |10\rangle_b + |01\rangle_a |01\rangle_b) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Очевидно, что здесь полная аналогия с двухуровневыми системами. Действительно можно сопоставить:

$$\begin{aligned} |z_+^a\rangle &= a_1^+ |0\rangle_a = |10\rangle_a, & |z_-^a\rangle_a &= |01\rangle_a, \\ |z_+^b\rangle &= b_1^+ |0\rangle_b = |10\rangle_b, & |z_-^b\rangle_b &= |01\rangle_b, \\ |\Psi_{\text{init}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+^a, z_+^b\rangle + |z_-^a, z_-^b\rangle) \end{aligned}$$

Эта аналогия базируется на том, что по условиям эксперимента в каждом луче может быть не больше одного фотона. Мы видим, что оптические эксперименты с бифотонами эквивалентны экспериментам с двухуровневыми частицами. В нашем случае детектирование фотонов в каждой паре каналов (такая возможность на рисунке 6б не показана) эквивалентно измерению проекций спинов двух частиц на ось z . Очевидно, что всего можно зарегистрировать два фотона. Например, если бы мы зарегистрировали фотоны в каналах a_1 и b_2 , мы могли бы сказать, что это эквивалентно тому, что частицы обнаружены в состояниях $|z_+^a\rangle$ и $|z_-^b\rangle$.

Продолжим аналогию. Пусть мы хотим измерить проекцию частиц (воображаемых) на ось, например, x . Тогда нам надо переписать наше состояние в базисе $|x_{\pm}^a, x_{\pm}^b\rangle$. Это нетрудно сделать, используя формулы, полученные в приложении А:

$$\begin{aligned} |z_{\pm}^a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_+^a\rangle \pm |x_-^a\rangle), \\ |z_{\pm}^b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_+^b\rangle \pm |x_-^b\rangle), \\ |x_{\pm}^a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1^+ \pm a_2^+|0\rangle_a), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{init}}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x_+^a + x_-^a\rangle |x_+^b + x_-^b\rangle + \\ &\quad + |x_+^a - x_-^a\rangle |x_+^b - x_-^b\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_+^a\rangle |x_+^b\rangle + |x_-^a\rangle |x_-^b\rangle) = \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|a_1^+ + a_2^+|b_1^+ + b_2^+ + |a_1^+ - a_2^+|b_1^+ - b_2^+)|0\rangle \quad (4.15)$$

Здесь для нас важны формулы (4.13 и 4.15), показывающие чему соответствует в оптических измерениях переход к измерению проекций спина (воображаемых) частиц на ось x . Покажем, что измерение фотонов в детекторах, показанных на рис. 6б, как раз может быть эквивалентно измерению на ось x .

Продолжаем описание прохождения волн после их выхода из кристалла в схеме на рис. 6б. Операторы поля перед светоделителями получают фазовые множителя (описывающие задержку α и β):

$$\begin{aligned} a_1 &\Rightarrow a_1 e^{-i\alpha}, & a_2 &\Rightarrow a_2, \\ b_1 &\Rightarrow b_1 e^{-i\beta}, & b_2 &\Rightarrow b_2. \end{aligned}$$

Обозначим через a_{\pm} операторы лучей идущих на детекторы A_{\pm} , а через b_{\pm} — на B_{\pm} и выразим их через операторы входных полей:

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{a_1 e^{-i\alpha} + a_2}{\sqrt{2}}, \\ a_- &= \frac{a_1 e^{-i\alpha} - a_2}{\sqrt{2}}, \\ a_1 &= e^{i\alpha} \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}}, \\ a_2 &= \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{2}}, \\ b_+ &= \frac{b_1 e^{-i\beta} + b_2}{\sqrt{2}}, \\ b_- &= \frac{b_1 e^{-i\beta} - b_2}{\sqrt{2}}, \\ b_1 &= e^{i\beta} \frac{b_+ + b_-}{\sqrt{2}}, \\ b_2 &= \frac{b_+ - b_-}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выписать состояние поля перед детекторами, просто подставляя в (4.12) выражения для a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , полученные выше. Это можно делать, так как вакуумное состояние $|0\rangle$ для поля после кристалла, которое фигурирует в (4.12), и вакуумное состояние $|0\rangle$ для поля перед детекторами неразличимы. В результате получаем:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{fin}}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-i(\alpha+\beta)} [a_+^\dagger + a_-^\dagger][b_+^\dagger + b_-^\dagger] + \right. \\ &\quad \left. + [a_+^\dagger - a_-^\dagger][b_+^\dagger - b_-^\dagger] \right) |0\rangle \end{aligned}$$

Мы видим (ср. (4.14), что при $\alpha+\beta = 2\pi n$ (n — целое) измерение числа фотонов в детекторах эквивалентно измерению проекций спинов (воображаемых) частиц на ось x .

Например, оператор разности числа фотонов ($n_{A_+} - n_{A_-}$) (в каналах A_+ и A_-) математически идентичен регистрации проекции спина (см. подробности в [11]):

$$n_{A_+} - n_{A_-} = \sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi,$$

где ϕ — фаза задержки, вносимая в одно из плеч (см. рис. 6).

5 Элементы классической теории информации

5.1 Количество информации

Состояние классических логических элементов, элементов памяти, а также различных каналов связи описывается небольшим количеством макроскопических параметров, которых, однако недостаточно для того, чтобы считать состояние такой физической системы полностью определенной, поскольку оно представляет собой совокупность огромного числа не доступных контролю микросостояний. Для отражения этого понятия в статистической физике вводится понятие *энтропии* системы S (мы будем называть ее физической энтропией):

$$S = \kappa \ln \Delta\Gamma,$$

где κ — постоянная Больцмана, $\Delta\Gamma$ — статвес, равный числу микросостояний, охватываемым макросостоянием системы.

С понятием физической энтропии тесно связано понятие информационной энтропии H , которая с классической точки зрения является мерой недостатка информации о системе. *Информационную энтропию Шеннона* определяют следующим образом:

$$H = \log_2 \Delta\Gamma = - \sum p_n \log_2 p_n, \quad \sum p_n = 1, \quad (5.1)$$

где p_n — вероятность n -го микросостояния макроскопической системы.

Количество информации I (или просто информация) о состоянии классической системы, получаемое в результате измерений внешним прибором определяется как разность начальной информационной энтропии H_0 и информационной энтропии состояния системы после измерения H :

$$I = H_0 - H.$$

В идеальном случае, когда отсутствуют шумы и помехи, создаваемые внешними источниками канале связи, конечное распределение вероятностей сводится к определенному значению

$$p_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n = n_0 \\ 0, & \text{if } n \neq n_0 \end{cases},$$

т.е. $H = 0$ и максимальное значение энтропии будет определяться соотношением $I_{\max} = H_0$. Таким образом информационная энтропия Шеннона

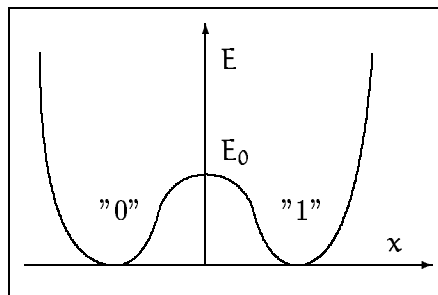


Рис. 7: Физическая модель логического элемента, имеющего два устойчивых положения. Частица может находиться в двух устойчивых положениях "0" и "1".

имеет смысл максимальной информации в системе, которая может быть определена в идеальных условиях отсутствия шумов и помех.

Рассмотрим в качестве примера логический элемент, который может находиться в одном из двух равновероятных состояниях. Обозначим из 0 и 1. В качестве физической модели можно представить себе двугорбую яму (см. рис. 7):

Нетрудно определить, что для этого случая $\Delta\Gamma = 2$ и максимальное количество информации равно единице, которую принято называть *битом*

$$I_{\max} = \log_2 \Delta\Gamma = 1 \text{ бит}$$

Таким образом, информационная энтропия определяет число битов, которое требуется для кодирования информации в рассматриваемой системе или сообщении.

Изменение физической энтропии двухуровневого элемента, соответствующее изменению информации на один бит равно (т.е. уменьшение энтропии при точном измерении где — справа или слева — находится частица на рис. 7):

$$\Delta S = -\kappa \ln 2$$

При этом сам элемент переключается в неравновесное состояние относительно окружения.

При переключении элемента над ним производится работа ΔA , которая согласно первому началу термодинамики идет на изменение его внутренней энергии ΔU и на тепло $-\Delta Q$, передаваемое термостату:

$$\Delta A = \Delta U - \Delta Q = \Delta U + T\Delta S_T$$

где $-\Delta Q = T\Delta S_T$, $T = \text{const}$ — температура термостата, ΔS_T — изменение энтропии термостата.

Минимальная работа ΔA_{\min} будет в случае, когда суммарная энтропия логического элемента и термостата не изменяется (так называемый термодинамически обратимый процесс), т.е. $\Delta S + \Delta S_T = 0$ и температура T постоянна:

$$\Delta U - \Delta Q \geq \Delta A_{\min} = \Delta(U - TS) = \Delta F, \quad (5.2)$$

где ΔF — изменение свободной энергии логического элемента, определяющая ту часть изменения внутренней энергии, которая может быть восстановлена в виде обратимой работы.

К фундаментальным понятиям теории информации относится *термодинамический предел для энергии переключения*, определяемое как предельное значение $\Delta A_{\min} = \Delta F$, которую необходимо сообщить логическому элементу для того, чтобы термодинамически обратимым образом перевести его в состояние, отличающееся от исходного на 1 бит информации. Полагая в (5.2) $\Delta U = 0$, получаем:

$$\Delta A_{\min} = \Delta F_{\min} = \kappa T \ln 2 \quad (5.3)$$

$$\Delta A_{\min} \simeq 3 \times 10^{-21} \text{ Дж при } T = 300 \text{ К.}$$

Рассмотрим, что значит все вышесказанное для модели логического элемента на рис. 7. Для того, чтобы произвести переключение частицы в логическом элементе надо сообщить как минимум энергию, равную высоте энергетического барьера E_0 для того, чтобы она оказалась на его вершине. Далее частица "сама" свалится в конечное состояние. Из уравнения (5.3) следует, что $E_0 = \kappa T \ln 2$. Эта энергия в результате переключения вся переходит в тепло (когда частица сваливается в конечное состояние и релаксирует к состоянию равновесия). Заметим, однако, что при условии (5.3) вероятность того, что частица под действием тепловых флуктуаций случайно перейдет в другое состояние, довольно велика. Ее можно оценить как

$$p \simeq \exp\left(-\frac{\Delta A_{\min}}{\kappa T}\right) = \frac{1}{2},$$

Поэтому обычно выбирают энергию переключения с запасом по сравнению с (5.3): $\Delta A_{\min} = 4\kappa T$.

5.2 Пропускная способность канала

В теории информации фундаментальным является также вопрос о максимальном количестве информации, которое можно передать по коммуникационному каналу (в качестве канала может рассматриваться и логическое устройство). В идеальном канале без помех и шумов информация может

передаваться с неограниченной скоростью (очевидно, что каждый бит в этом случае может кодироваться, например, сколь угодно коротким импульсом). При наличии же шумов эта скорость ограничена. Для характеристики максимальной скорости передачи информации по каналу (или через логическую структуру) вводится понятие *пропускной способности* или *емкости* канала C :

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_m(t)}{t},$$

где t — длительность передаваемого сообщения, $I_m(t)$ — максимальное количество информации, которое может быть передано за время t при оптимальном кодировании и с исчезающе малой ошибкой при $t \rightarrow \infty$. Для стационарного процесса пропускная способность определяется как

$$C = I_m \Delta f,$$

где Δf — ширина полосы частот, пропускаемой каналом связи, I_m — максимальное количество информации на единицу частотного интервала.

Если характеризовать канал шириной полосы $f_{\max} = 1/2t$, то при мощности $N = \kappa T/2t$ случайных помех, создаваемых тепловым окружением, пропускную способность можно определить с помощью *формулы Шеннона*:

$$C = \frac{I_m}{2t} = \frac{1}{2t} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right),$$

где P/N — отношение сигнала к шуму (P — мощность сигнала). Шеннон доказал, что при условии оптимального кодирования передача информации по каналу при наличии шумов возможна с исчезающе малой ошибкой.

Информационный процесс в логическом элементе можно характеризовать также энергией, требуемой для передачи одного бита. Эта энергия E_{bit} называется *энергетической ценой* одного бита и определяется выражением $E_{\text{bit}} = P/N$. Получаем:

$$E_{\text{bit}} = \frac{2Pt}{I_m} = \frac{2Pt}{\log_2 \left(1 + \frac{2Pt}{\kappa T}\right)} = \kappa T \ln 2 \frac{\frac{2Pt}{\kappa T}}{\ln \left(1 + \frac{2Pt}{\kappa T}\right)} \quad (5.4)$$

В отсутствие шумов $T \rightarrow 0$ энергетическая цена может быть произвольно мала. При наличии шумов минимизируя выражение (5.4) получим:

$$E_{\min \text{ bit}} = \kappa T \ln 2,$$

которое совпадает с (5.3). Необходимо заметить, что это выражение соответствует предельно малой энергии $Pt \rightarrow 0$, т.е. при конечном времени переключения t и конечной температуре соответствуют предельно малой скорости передачи информации $C \rightarrow 0$. Поскольку в реальных условиях передача сигнала должна происходить с конечной скоростью C , то для энергетической цены получим

$$E_{\text{bit}} > E_{\text{min bit}} = \kappa T \ln 2.$$

5.3 Обратимые логические операции

Возникает вопрос: а нельзя ли преодолеть термодинамический предел ΔA_{min} (5.3)? Оказывается можно! Это особенно легко понять на модели логического элемента, изображенного на рис. 7. Ведь предел (5.3) есть плата за то, что энергия, равная высоте барьера E_0 необратимо рассеивается в тепло. Но ведь можно перевести частицу через барьер, затрачивая как можно меньше энергии в тепло. Например, если связь с термостатом соответствует вязкому трению, то этот такое обратимое переключение должно быть осуществлено очень медленно (так называемая *адиабатическая динамика*).

Ландауэром было показано, что если в логическом элементе происходит *логически необратимая операция*, то оно неизбежно вызывает диссипацию энергии (5.3) на каждую такую операцию. Классическим примером логически необратимой операции является стирание. Например, логическая операция AND: в результате ее действия из двух битов на входе получается только один бит на выходе и нет способа логически восстановить первоначальное состояние. В современных компьютерах реализуются именно такие необратимые операции.

Однако можно сконструировать компьютер из *логически обратимых* элементов. Беннет предложил умозрительную схему компьютера, состоящего из упруго сталкивающихся шаров. В качестве примера на рисунке (8) приведена *бездиссипативная* схема считывания информации о наличии бита в ячейке. Это фактически ячейка дублирования (FANOUT) данных,

Для примера ячейки с потенциальной ямой (рис. 7), переключение можно совершить без затраты энергии, если во время переключения профиль ямы определенным образом деформировать.

Фредкиным и Тоффоли были предложены универсальные логически обратимые устройства (гей-

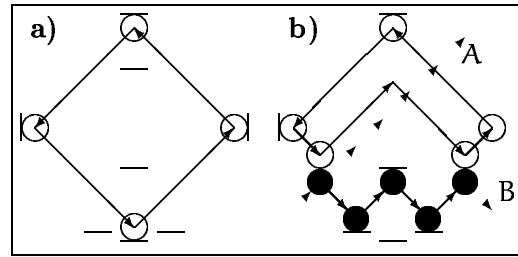


Рис. 8: Схема *бездиссипативного* считывания информации о наличии бита в ячейке. Наличие или отсутствие белого шара в ячейке, состоящей из упругих отражателей, проверяется черным шаром. Если в ячейке есть белый шар, то черный шар изменяет направление своего движения.

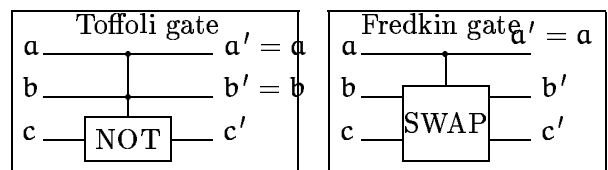


Рис. 9: Схемы вентилей Тоффоли и Фредкина.

ты), которые могут быть и физически обратимыми (например, в умозрительном баллистическом компьютере со сталкивающимися упругими шарами). Их универсальность означает, что из них можно получить любые используемые гейты в логически обратимом варианте. Их схемы приведены на рис. 9.

Гейт Тоффоли обозначается как CCNOT (controlled-controlled NOT, т.е. дважды контролируемое НЕ). Две контролируемые линии a и b дублируются на выходе. К линии c применяется операция NOT, если только на входе обоих контролируемых линий есть по биту ($a = b = 1$). В противном случае состояние c дублируется на выходе.

Гейт Фредкина обозначается как CSWAP (controlled SWAP, т.е. контролируемый обмен). Контролирующая линия a дублируется на выходе. Линии b и c обмениваются состояниями, если на входе контролирующей линии есть бит ($a = 1$). В противном случае линии b и c дублируются на выходе.

Другим примером более простой обратимой (но не универсальной) ячейки является CNOT (controlled-NOT, т.е. контролируемое НЕ), изображенная на рис. 10. Более компактные общепринятые обозначения ячеек CNOT и CCNOT изобра-

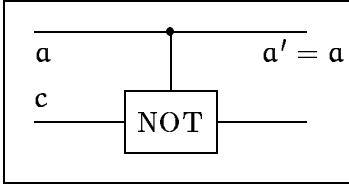


Рис. 10: Схем элемента CNOT. Контролирующая линия a дублируется на выходе. К линии с применяется операция NOT, только если на входе линии a есть бит ($a = 1$). В противном случае состояние c дублируется на выходе

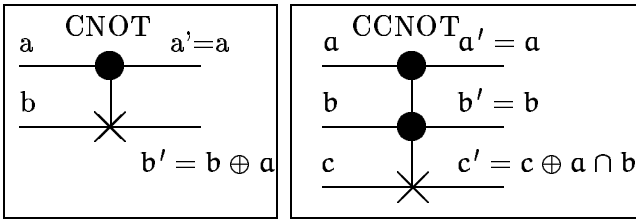


Рис. 11: Общепринятое обозначение гейтов CNOT и CCNOT

жены на рис. 11

Приведем пример использования ячеек CNOT и CCNOT для сложения двух чисел, каждое из которых меньше или равно 1. Пусть в двоичной системе эти числа записываются как $0a$ и $0b$, где $a, b = 0, 1$. тогда схема, изображенная на рис. 12, будет вычислять их сумму $0a + 0b = cd$.

5.4 Количество квантовой информации

Понятие информационной энтропии, введенное фон Нейманом [6] (*энтропия фон Неймана*), является основным понятием квантовой теории информации и определяется выражением:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\text{Sp } \hat{\rho} \log_2 \hat{\rho} \geq 0, \\ \text{Sp } \hat{\rho} &= 1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

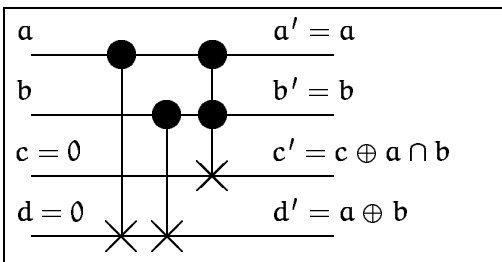


Рис. 12: Схема вычисления суммы

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности. Нетрудно видеть, что для чистого состояния энтропия $S(\rho) = 0$, что означает его полную определенность. Поскольку энтропия фон Неймана инвариантна относительно представления, то ее удобно рассчитывать переходя в диагональное представление.

Рассмотрим значение информационной энтропии H и энтропии фон Неймана S для двухуровневой частицы (кубит). Пусть частица находится в состоянии с определенным спином, например,

$$|\psi\rangle = |z_+\rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |z_+\rangle\langle z_+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H &= 0, \quad S = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Для этого случая информационная энтропия и энтропия фон Неймана совпадают и равны нулю.

Теперь пусть частица находится в смешанном состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + |z_-\rangle).$$

В этом случае матрица плотности равна:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно посчитать, что информационная энтропия равна $H = \log_2 2$, т.е. одному биту. Чтобы вычислить энтропию фон Неймана, надо перейти к диагональному представлению. В нашем случае нетрудно заметить, что

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + |z_-\rangle) = |x_+\rangle.$$

В этом представлении матрица плотности диагональна и имеет вид:

$$\hat{\rho} = |x_+\rangle\langle x_+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$S = 0.$$

В общем случае выполняется равенство (лемма Клейна):

$$S(\rho) \leq H.$$

Знак равенства относится к случаю, когда состояние частицы чистое и матрица плотности задана в диагональном представлении.

Смысл этого неравенства заключается в том, что энтропия фон Неймана учитывает дополнительную информацию, заключающуюся в недиагональных элементах матрицы плотности, тогда как информационная энтропия Шеннона эту информацию игнорирует. Это означает, что кубит имеет значительно большую информационную емкость, чем классический бит.

6 Квантовое клонирование и квантовая телепортация

6.1 Квантовое клонирование

Клонирование отличается от копирования тем, что при клонировании оператор, желающий создать копию неизвестного состояния, знает только, что копия должна быть идентична оригиналу (первоначальному состоянию), но он ничего не знает о самом состоянии.

Покажем, что квантовое клонирование запрещено. Пусть имеется два сигнальных состояния квантовой системы S : $|a_s\rangle$ и $|b_s\rangle$ и некоторое устройство (оператор) K , которой создает копии этих состояний в системе C , находящейся в начальном состоянии $|0_c\rangle$:

$$\begin{aligned} K|a_s 0_c\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |a_s a_c\rangle, \\ K|b_s 0_c\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |b_s b_c\rangle, \end{aligned} \quad (6.1)$$

Тогда при клонировании суперпозиции этих состояний:

$$|d_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_s\rangle + |b_s\rangle)$$

получим

$$\begin{aligned} K|d_s 0_c\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |d_s d_c\rangle = \\ &= \frac{1}{2} |a_s + b_s\rangle \otimes |a_c + b_c\rangle, \\ &= \frac{1}{2} |a_s a_c + a_s b_c + b_s a_c + b_s b_c\rangle \end{aligned} \quad (6.2)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} K|(a_s + b_s) 0_c\rangle &= \frac{1}{2} (|a_s a_c\rangle + |b_s b_c\rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (|a_s a_c\rangle + |b_s b_c\rangle), \end{aligned} \quad (6.3)$$

Сравнивая (6.2) и (6.3), получаем, что

$$K|d_s 0_c\rangle \neq \frac{1}{\sqrt{2}} K|(a_s + b_s) 0_c\rangle,$$

т.е. операция клонирования суперпозиции противоречит принципу линейности унитарных операций.

6.2 Вариант телепортации [2]

Пусть Алиса имеет переплетенное состояние КШ+ типа "Кота Шредингера" из двух частиц:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B\rangle \quad (6.4)$$

Частицу А Алиса посылает Бобу, а частица В остается у Алисы.

Кроме того у Алисы есть третья (контрольная) частица, состояние которой она и хочет передать (телепортировать) Бобу.

Пусть контрольная частица находится в произвольном состоянии

$$|\Psi_C\rangle = a|z_-^C\rangle + b|z_+^C\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (6.5)$$

Таким образом общее начальное состояние двух запутанных кубитов А и В вместе с контрольным кубитом С можно представить в виде:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \left(a|z_-^C\rangle + b|z_+^C\rangle \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|z_+^A z_+^B\rangle + |z_-^A z_-^B\rangle \right) \quad (6.6)$$

Рассмотрим сначала частный упрощенный случай.

6.2.1 Частный случай: $|b| = 1$

Упростим ситуацию: пусть $a = 0$, $|b| = 1$. В этом случае общее начальное состояние можно представить в виде:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{b}{\sqrt{2}} \left(|z_+^A\rangle \otimes |z_+^B z_+^C\rangle + |z_-^A\rangle \otimes |z_-^B z_+^C\rangle \right)$$

Тогда Алиса должна измерить проекции спинов на ось z своих частиц В и С. Из (6.6) видно, что есть корреляция: если спины частиц В и С однонаправлены, то частица А у Боба находится в состоянии $|z_+^A\rangle$, если же противоположны, то частица А — в состоянии $|z_-^A\rangle$.

Рассмотрим обе возможности отдельно:

- 1) Спины частиц В и С однонаправлены (т.е. результат измерения $(++)$ или $(--)$). Тогда Алиса по обычному каналу передает Бобу 1 бит, который означает "да". У Боба в этом случае оказалась частица в том же состоянии, что и начальное состояние контрольной частицы С.

- 2) Спины частиц В и С противоположны (т.е. результат измерения $(+-)$ или $(-+)$). Тогда Алиса по обычному каналу передает Бобу 1 бит, который означает "нет". Боба в этом случае оказалась частица в другом состоянии, не совпадающем с начальным состоянием контрольной частицы С. Но важно, что Боб знает это. Поэтому получив от Алисы "нет", он на свою частицу действует так, чтобы перевести ее в состояние $|z_+^B\rangle$. А именно он действует оператором σ_x (операция NOT), который, как известно, характеризуется следующими равенствами:

$$\sigma_x |z_+^B\rangle = |z_-^B\rangle, \quad \sigma_x |z_-^B\rangle = |z_+^B\rangle$$

Таким образом, Боб получает частицу В в том же состоянии, что и начальное состояние контрольной частицы С.

Почеркнем, что ограничение $|b| = 1$ является существенным и рассмотренный случай интересен лишь в методическом плане.

Поэтому рассмотрим произвольный случай.

6.2.2 Общий случай

В этом случае независимые измерения z -проекции спинов частиц В и С не позволяют Алисе определить фазы коэффициентов a и b . Поэтому она должна поступать более изощренно. Перепишем начальное состояние (6.6) трех частиц в виде:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{a|z_-^A\rangle + b|z_+^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_+^B z_+^C\rangle + |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{-a|z_-^A\rangle + b|z_+^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_+^B z_+^C\rangle - |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{a|z_+^A\rangle + b|z_-^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_-^B z_+^C\rangle + |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{-a|z_+^A\rangle + b|z_-^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_-^B z_+^C\rangle - |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (6.7)$$

Разложение (6.7) по векторам

$$\begin{aligned} |C_+\rangle &= \frac{|z_+^B z_+^C\rangle + |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |C_-\rangle &= \frac{|z_+^B z_+^C\rangle - |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |E_+\rangle &= \frac{|z_-^B z_+^C\rangle + |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |E_-\rangle &= \frac{|z_-^B z_+^C\rangle - |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

называется разложением по ортонормированному базису Белла (J. Bell).

Алиса должна измерить частицы В и С в базисе Белла (иначе говоря, производит проектирование на состояния этого базиса). Результат она сообщает по *классическому* каналу Бобу. Тем самым она сообщает Бобу, какие операции надо произвести с его частицей, чтобы получить начальное состояние контрольной частицы. Возможны четыре ситуации, которые мы рассмотрим отдельно.

Алиса получила $|C_+\rangle$ В этом случае Боб знает, что состояние его частицы $a|z_-^A\rangle + b|z_+^A\rangle$, которое совпадает с *начальным* состоянием (6.5) контрольной частицы и процесс телепортации заканчивается.

Алиса получила $|C_-\rangle$ В этом случае Боб знает, что состояние его частицы $-a|z_-^A\rangle + b|z_+^A\rangle$, и оно отличается знаком от *начального* состояния (6.5). Тогда он должен воздействовать на свою частицу оператором σ_z . Оператор σ_z , как известно, характеризуется следующими свойствами:

$$\sigma_z|z_+^B\rangle = |z_+^B\rangle, \quad \sigma_z|z_-^B\rangle = -|z_-^B\rangle.$$

На этом процесс телепортации заканчивается.

Алиса получила $|E_+\rangle$ В этом случае Боб знает, что состояние его частицы $a|z_+^A\rangle + b|z_-^A\rangle$ и оно отличается перестановкой от *начального* состояния (6.5). Тогда он должен воздействовать на свою частицу оператором σ_x (NOT). Оператор σ_x , как известно, характеризуется следующими свойствами:

$$\sigma_x|z_+^B\rangle = |z_-^B\rangle, \quad \sigma_x|z_-^B\rangle = |z_+^B\rangle.$$

На этом процесс телепортации заканчивается.

Алиса получила $|E_-\rangle$ В этом случае Боб знает, что состояние его частицы $-a|z_+^A\rangle + b|z_-^A\rangle$ и оно отличается перестановкой и знаком от *начального* состояния (6.5). Тогда он должен воздействовать на свою частицу сначала оператором $-\sigma_z$, а потом оператором σ_x :

$$\begin{aligned} \sigma_x \times (-\sigma_z) \left[-a|z_+^A\rangle + b|z_-^A\rangle \right] &= \\ = \sigma_x \left[a|z_+^A\rangle + b|z_-^A\rangle \right] &= a|z_-^A\rangle + b|z_+^A\rangle. \end{aligned}$$

На этом процесс телепортации заканчивается.

Повторим еще раз, что у Боба оказалась частица *точно в таком состоянии*, что была у Алисы. При этом само состояние этой частицы остается неизвестным (коэффициенты a и b не определены). Кроме того, первоначальное состояние частицы, которая была у Алисы, разрушено в процессе измерения (*клонирования нет*).

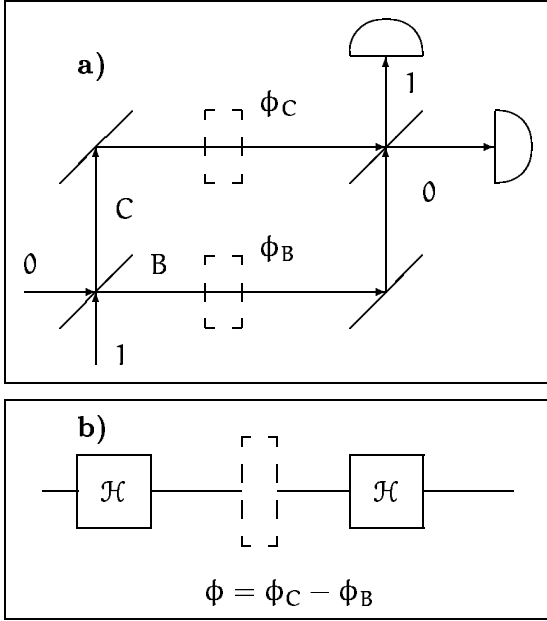


Рис. 13:

7 Квантовые гейты

7.1 Интерферометр Маха-Цандера

Рассмотрим интерферометр Маха-Цандера, на вход которого подается один квант в один или другой канал. В нашем рассмотрении мы исключаем возможность, когда в обоих каналах присутствует по кванту.

Состояние $|01\rangle$ будет соответствовать отсутствию фотона в горизонтальном входном канале, и наличие фотона в вертикальном канале как показано на рис. 13. (Состояние $|10\rangle$ будет соответствовать фотону в горизонтальном входном канале и отсутствию фотона в вертикальном). Эти состояния соответствуют информационным состояниям входного кубита.

Будем обозначать операторы рождения и уничтожения в горизонтальном канале как a_g, a_g^\dagger , в вертикальном канале — a_v, a_v^\dagger . Тогда входные состояния могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} |\psi_{in}(1)\rangle &= |01\rangle = a_v|00\rangle, \\ |\psi_{in}(0)\rangle &= |10\rangle = a_g|00\rangle. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Эти состояния соответствуют информационным состояниям входного кубита. Договоримся, что состояние $|01\rangle$ соответствует состоянию входного кубита $|1\rangle$, а состояние $|10\rangle$ — $|0\rangle$.

Первый светоделитель Пусть на вход светоделителя поступает состояние $|\psi_{in}(0)\rangle$, соответствующее состоянию кубита 0 .

Нетрудно выразить (в представлении Гейзенберга) операторы рождения a_b в плече В и a_c в плече С (см рис. 13), соответствующие полю после первого светоделителя:

$$a_b = \frac{a_g + a_v}{\sqrt{2}}, \quad a_c = \frac{a_g - a_v}{\sqrt{2}}$$

Отсюда можно выразить операторы входного поля через операторы выходного поля:

$$a_g = \frac{a_b + a_c}{\sqrt{2}}, \quad a_v = \frac{a_b - a_c}{\sqrt{2}}$$

и, подставив их в (7.1), получить состояние поля после первого светоделителя:

$$|\psi_{after 1}\rangle = \frac{a_b^\dagger + a_c^\dagger}{\sqrt{2}} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \quad (7.2)$$

Это можно делать, так как вакуумное состояние $|00\rangle_{in}$ для поля до светоделителя, которое фигурирует в (7.1), и вакуумное состояние $|00\rangle_{after 1}$ для поля после светоделителя неразличимы.

Таким образом после первого светоделителя мы имеем состояние, в котором один фотон распределен между двумя модами. При этом, например, член $|10\rangle$ имеет следующий смысл: в моде, соответствующей пути В есть фотон, в моде С — нет.

Если вернуться к описанию кубита, то действие светоделителя можно описать оператором Адамара:

$$|\psi_{in}\rangle \Rightarrow |\psi_{after 1}\rangle = \mathcal{H}|\psi_{in}\rangle, \quad (7.3)$$

$$\mathcal{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad (7.4)$$

$$\mathcal{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (7.5)$$

Фазовый набег Пусть длины оптических путей между светоделителями соответствуют набегу фазы ϕ_B по пути В и ϕ_C по пути С: Тогда для операторов, описывающих поле перед вторым светоделителем, имеем

$$a_b^\dagger \rightarrow a_b^\dagger e^{i\phi_B}, \quad a_c^\dagger \rightarrow a_c^\dagger e^{i\phi_C}.$$

Состояние поля будет соответственно:

$$|\psi_{before 2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi_B}|01\rangle + e^{i\phi_C}|10\rangle)$$

Возвращаясь к описанию кубита, это состояние можно записать в виде

$$|\psi_{\text{before } 2}\rangle = \frac{e^{i\phi_C}}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{-i\phi}|1\rangle),$$

где $\phi = \phi_C - \phi_B$.

Второй светоделитель Операторы описывающие поле на выходе после второго светоделителя обозначим через b_g (горизонтальный канал) и b_v (вертикальный канал), для которых получаем:

$$\begin{aligned} b_g &= \frac{a_b e^{-i\phi_B} + a_c e^{-i\phi_C}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{e^{-i\phi_B}}{2} (a_g [1 + e^{-i\phi}] + a_v [1 - e^{-i\phi}]) = \\ &= e^{-i\phi_+/2} \left(a_g \cos \frac{\phi}{2} + i a_v \sin \frac{\phi}{2} \right), \\ b_v &= e^{-i\phi_+/2} \left(-i a_g \sin \frac{\phi}{2} + a_v \cos \frac{\phi}{2} \right), \\ \phi_+ &= \phi_B + \phi_C, \quad \phi = \phi_C - \phi_B. \end{aligned}$$

Обращаем систему и получаем:

$$\begin{aligned} a_g &= e^{i\phi_+/2} \left(b_g \cos \frac{\phi}{2} + i b_v \sin \frac{\phi}{2} \right), \\ a_v &= e^{i\phi_+/2} \left(-i b_g \sin \frac{\phi}{2} + b_v \cos \frac{\phi}{2} \right). \end{aligned}$$

Теперь мы можем выписать состояние поля после второго светоделителя (по-прежнему считаем, что на входе интерферометра состояние $|10\rangle = a_g^+|00\rangle$):

$$|\psi_{\text{after } 2}\rangle = e^{-i\phi_+/2} \left(i \sin \frac{\phi}{2} |01\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |10\rangle \right)$$

Возвращаясь к описанию в состояниях кубита, переписываю:

$$|\psi_{\text{after } 2}\rangle = e^{i\phi_+/2} \left(\cos \frac{\phi}{2} |0\rangle - i \sin \frac{\phi}{2} |1\rangle \right) \quad (7.6)$$

7.2 Квантовые гейты

Мы уже видели, что первый светоделитель на языке квантового компьютера соответствует гейту Адамара.

Рассмотрим набег фазы как действие отдельного гейта. Введем дополнительный ("холостой") бит $|u\rangle$ который преобразуется под действием

некоторого оператора контролируемого фазового сдвига "controlled- \mathcal{U} ". Контролирующим битом является наш основной кубит $|\psi\rangle$, а оператор \mathcal{U} действует так:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}|u\rangle &= e^{i\theta}|u\rangle, \quad \text{if } |\psi\rangle = |1\rangle, \\ \mathcal{U}|u\rangle &= |u\rangle, \quad \text{if } |\psi\rangle = |0\rangle, \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую последовательность эволюции кубита (действие оператора Адамара описывается формулами (7.4, 7.5)):

$$\begin{aligned} |0\rangle|u\rangle &\xrightarrow{\mathcal{H}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|u\rangle &\xrightarrow{c-u} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)|u\rangle &\xrightarrow{\mathcal{H}} \\ \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + i \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) e^{i\theta/2}|u\rangle \end{aligned}$$

Мы видим, что это соответствует эволюции кубита в интерферометре Маха-Цандера при условии, что $\theta = \phi$ и $\phi_B = 2\pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

7.3 Задача Дойча

Рассмотрим в качестве примера задачи. эффективно решаемой с помощью квантового компьютера Задачу Дойча, следуя работе [12]. Там же можно найти ссылки на источники.

Сначала предположим, что разница фаз ϕ в интерферометре Маха-Цандера может быть или $\phi = 0$, или $\phi = \pi$. Сможем ли мы заметить эту разницу? Конечно, да. Ведь при $\phi = 0$ детектор *всегда* покажет состояние "0", а при $\phi = \pi$ — состояние "1" (опять же *всегда*). Именно это свойство используется при решении задачи Дойча.

Рассмотрим булевскую функцию

$$f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

т.е. функция $f(x)$ принимает два значения $\{0, 1\}$ в зависимости от значения аргумента x , который в простейшем рассматриваемом случае также может принимать два значения $\{0, 1\}$. В нашем случае может быть четыре такие функции: две постоянные функции ($f(0) = f(1) = 0$ и $f(0) = f(1) = 1$) и две "сбалансированные" ($f(0) = 0, f(1) = 1$ и $f(0) = 1, f(1) = 0$). Задача Дойча заключается в том, чтобы определить к какому классу относится наша функция f — к классу постоянных или сбалансированных функций (другими словами, числа

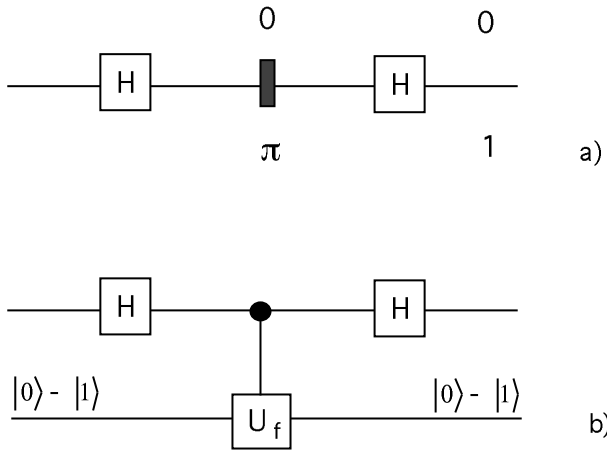


Рис. 14: Квантовая сеть (последовательность операций) для вычисления задачи Дойча.

$f(0)$ и $f(1)$ одинаковы или различны). Заметим, что нам не нужно по условиям задачи вычислять конкретные значения функций $f(0)$ и $f(1)$, а требуется определить только глобальное свойство f . Классическая интуиция говорит, что в любом случае нам надо вычислить оба значения $f(0)$ и $f(1)$, т.е. дважды вычислить функцию f . Мы покажем, что в квантовом компьютере для решения проблемы Дойча достаточно вычислить функцию *один* раз.

Формально определим операцию "вычисления" функции f в терминах f -controlled-NOT (f -c-NOT) операции на двух битах: первый из них содержит входную переменную x (аргумент функции), а второй — вычисляемую функцию $f(x)$. Если первоначально второй бит был в состоянии 0 , то f -c-NOT операция переводит $(x, 0)$ в $(x, f(x))$. Ясно, что это просто формализация операции вычисления f . Чтобы сделать эту операцию обратимой и определенной для *любой* входных значений определим, что произвольное начальное состояние (x, y) переводится в $(x, y \oplus f(x))$ ³. В квантовых обозначениях операция f -controlled-NOT запишется в виде:

$$|x\rangle|y\rangle \xrightarrow{f\text{-c-NOT}} |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle. \quad (7.7)$$

Квантовая сеть (последовательность операций) для вычисления задачи Дойча представлена на

³Напомним, что операция \oplus (сложение по модулю 2) определяется следующим образом:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

рис. 14b. Первоначально основной и вспомогательный кубит находятся в состоянии

$$|0\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

(нормирующие множители опускаем). После первого действия оператора Адамара это состояние перейдет в

$$(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Посмотрим действие f -c-NOT на это состояние, замечая, что $x \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} & |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \xrightarrow{f\text{-c-NOT}} \\ & \xrightarrow{f\text{-c-NOT}} |x\rangle(|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) = \\ & = (-1)^{f(x)}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Таким образом состояние после операции f -controlled-NOT можно записать в виде:

$$[(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle](|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.9)$$

Мы видим, что каждому значению x соответствует свой фазовый множитель $(-1)^{f(x)}$. Это состояние может быть также переписано в виде

$$(-1)^{f(0)}(|0\rangle + (-1)^{f(0) \oplus f(1)}|1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle), \quad (7.10)$$

После второго действия оператора Адамара это состояние превращается

$$(-1)^{f(0)}|f(0) \oplus f(1)\rangle(|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.11)$$

Следовательно, первый кубит переходит в состояние $|0\rangle$, если функция f постоянна. Но если функция f сбалансированная, первый кубит переходит в состояние $|1\rangle$. Важно, что измерение состояния этого кубита даст *точную* информацию о том, является ли функция f постоянной или сбалансированной.

Подчеркнем, что мы в результате *одной* операции выяснили сбалансированная функция или нет, мы *не* вычисляли значение этой функции для разных $(0, 1)$ аргументов.

7.4 Обобщенная задача Дойча

Обобщенная задача Дойча (см. [12] и ссылки там) формулируется для булевых функций $f: \{0, 1\}^n \rightarrow$

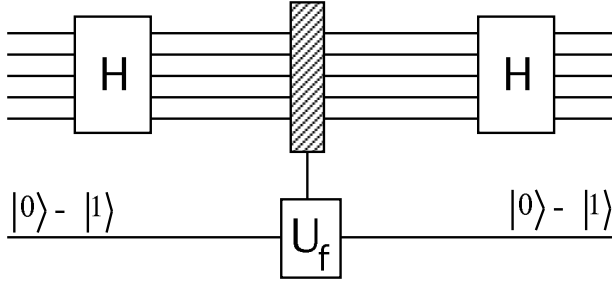


Рис. 15: Квантовая сеть (последовательность операций) для вычисления обобщенной задачи Дойча.

$\{0, 1\}$ следующим образом. Пусть известно, что одна из этих функций либо постоянна, либо сбалансирована (т.е. она принимает равное число раз значение 0 и значение 1 на всех n битах $\{0, 1\}^n$). Обобщенная задача Дойча состоит в том, чтобы определить: постоянная эта функция или сбалансированная.

Сколько вычислений требуется для этого? Любой классический алгоритм в худшем случае потребует для этого $2^{n-1} + 1$ операций⁴. Мы покажем, что существует алгоритм квантового компьютера, позволяющий решить эту задачу с помощью всего лишь одной вычислительной операции.

Этот алгоритм представлен на рис. 15. Контрольный регистр состоит из n кубитов, которые первоначально находятся в нулевом состоянии, которое мы будем обозначать как $|00 \dots 0\rangle$. Вспомогательный бит первоначально находится в состоянии $|0\rangle - |1\rangle$ и после вычисления он остается в том же состоянии.

Сначала применяем преобразование Адамара ко всем n контрольным кубитам. В данном случае оно определяется как

$$|x\rangle \xrightarrow{H} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle, \quad (7.12)$$

для $x \in \{0, 1\}^n$, где

$$x \cdot y = (x_1 \wedge y_1) \oplus \dots \oplus (x_n \wedge y_n), \quad (7.13)$$

т.е. скалярное произведение по модулю 2.⁵ Заметим, что это эквивалентно последовательному

⁴Количество всех комбинаций из n битов равно 2^n . Если один бит фиксирован, то после измерений для 2^{n-1} всех комбинаций оставшихся битов останется неизмеренным только один бит. выяснить

⁵Здесь операция $(x_1 \wedge y_1)$ означает $(x_1 \text{ AND } y_1)$. Для $x_1 \in \{0, 1\}$, $y_1 \in \{0, 1\}$ операция $(x_1 \text{ AND } y_1)$ дает 1, если $x_1 = y_1 = 1$, и — 0 во всех других случаях.

применению однобитового преобразование Адамара к каждому из n кубитов. Вычисление функции f производим опять с помощью операции (гейта) f -controlled-NOT (средний гейт на рис. 15), которое определяется как

$$|x\rangle|y\rangle \xrightarrow{f\text{-c-NOT}} |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle. \quad (7.14)$$

Это практически совпадает с определением (7.7), за исключением того, что $x \in \{0, 1\}^n$. в заключение применяем опять преобразование Адамара ко всем n контрольным битам.

Рассмотрим последовательность перечисленных действий. После первого применения преобразования Адамара состояние всех битов есть

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.15)$$

Заметим, что сумма содержит все возможные значения x (а их 2^n !). После гейта f -controlled-NOT получаем

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.16)$$

Фактически этим *одним* вычислением функции f мы получили информацию о всех (!) возможных значениях $f(x)$. Наконец после последнего преобразования Адамара состояние всех битов есть

$$\sum_{x,y \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus (x \cdot y)} |y\rangle(|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.17)$$

Теперь заметим, что амплитуда состояния $|00 \dots 0\rangle$ (контрольных n битов) равна

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} \frac{(-1)^{f(x)}}{2^n}. \quad (7.18)$$

Поэтому, если f постоянна, то амплитуда этого состояния есть

$$(-1)^{f(00 \dots 0)} |00 \dots 0\rangle(|0\rangle - |1\rangle),$$

т.е. она отлична от нуля. Однако, если функция f сбалансированная, тогда сумма (7.18) будет равна нулю. Таким образом, измеряя n контрольных кубитов (точнее, их проекцию на состояние $|00 \dots 0\rangle$), можно определенно определить, является ли функция f постоянной или сбалансированной.

8 Задачи

- 1) "Квантование линии 1". Проквантовать длинную линию, считая, что концы линии коротко замкнуты.
- 2) "Квантование линии 2". Проквантовать длинную линию, считая, что концы линии разомкнуты.
- 3) "Собственные значения σ_x ". Найти собственные состояния оператора σ_x .
- 4) "Собственные значения σ_y ". Найти собственные состояния оператора σ_y .
- 5) "Атом в классическом поле". Рассчитать зависимость населенностей двухуровневого атома в *нерезонансном* классическом поле. Считать, что частоты атома и поля близки $\omega_a = \omega_e + \delta$, $\delta \ll \omega_e$. Первоначально атом находился в нижнем состоянии $|z_-\rangle$.
- 6) "Атом в квантовом поле". Рассчитать зависимость населенностей двухуровневого атома в квантовом резонаторе. Считать, что частоты атома и резонатора близки $\omega_a = \omega_e + \delta$, $\delta \ll \omega_e$. Первоначально атом находился в нижнем состоянии $|z_-\rangle$.
- 7) "?".

А Матрицы Паули

Имеем 3 матрицы Паули, описывающие спин электрона:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Их собственные вектора удовлетворяют уравнению, например, для x -компоненты:

$$|x\rangle = \lambda \sigma_x \times |x\rangle$$

Нетрудно найти, что $\lambda = \pm 1$, а собственные вектора следующие:

$$\begin{aligned}|x_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |x_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ |y_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, & |y_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \\ |z_+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |z_-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Здесь индекс $+$ соответствует $\lambda = 1$, а индекс $-$ соответствует $\lambda = -1$.

Эти вектора ортонормированы и попарно ортогональны:

$$\begin{aligned}\langle x_+ | x_+ \rangle &= \langle x_- | x_- \rangle = 1, & \langle x_- | x_+ \rangle &= 0, \\ \langle y_+ | y_+ \rangle &= \langle y_- | y_- \rangle = 1, & \langle y_- | y_+ \rangle &= 0, \\ \langle z_+ | z_+ \rangle &= \langle z_- | z_- \rangle = 1, & \langle z_- | z_+ \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом каждая пара образует базис в пространстве состояний.

А.1 Амплитуды вероятностей

Пусть, к примеру, спин направлен по оси z , т.е. электрон находится в состоянии $|z_+\rangle$. Тогда можно найти амплитуды вероятности того, что при измерении проекции спина вдоль оси x я получу значение $+1$ или -1 :

$$\langle x_+ | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle x_- | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Полезно выписать полную таблицу:

$$\begin{aligned}\langle x_+|z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle x_-|z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle y_+|z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle y_-|z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle x_+|z_- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle x_-|z_- \rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}}, \\ \langle y_+|z_- \rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}}, & \langle y_-|z_- \rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

А.2 Оператор σ_ϕ

Найдем собственные вектора оператора

$$\sigma_\phi = \sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi,$$

который соответствует повороту спина на угол ϕ в плоскости xu .

Нетрудно получить, что собственные значения равны $\lambda \pm 1$ и равны

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad |\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Здесь индекс $+$ соответствует $\lambda = 1$, а индекс $-$ соответствует $\lambda = -1$.

Полезно выписать полную таблицу для проекций этого состояния на ось z :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+|z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle \Phi_-|z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_+|z_- \rangle &= \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, & \langle \Phi_-|z_- \rangle &= \frac{-e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Б Примеры: 2 частицы

Рассмотрим примеры перепутанных состояний (entangled states) двух частиц А и В и рассчитаем для них амплитуды вероятностей результатов измерений различных парных компонент спинов.

Б.1 КШ+

Пусть мы имеем перепутанное состояние КШ+ типа "Кот Шредингера" :

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B\rangle \quad (\text{B.1})$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.2})$$

$$\langle z_+^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{B.3})$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x -проекцию спина я получу в результате либо $(++)$, либо $(--)$, либо $(+-)$, либо $(-+)$?

Используя таблицу (А.1), получаю

$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle x_-^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

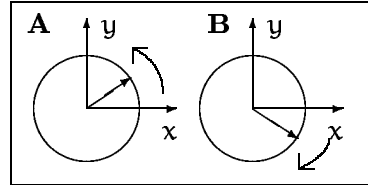
$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Аналогично для y -компоненты:

$$\begin{aligned}\langle y_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(i)^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0 \\ \langle y_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0,\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}\langle y_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle y_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Эти результаты могут быть качественно описаны следующей "фазовой" диаграммой:



Эта диаграмма может быть объяснена следующим образом. x - и y -компоненты спина каждой частицы распределены случайно, НО они коррелированы между собой, как показано на диаграмме.

Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\begin{aligned}\langle x_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{-i}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}, \\ \langle x_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1-i}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

$$\langle x_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{B.9})$$

$$\langle x_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{B.10})$$

Б.1.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_+^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(-e^{-i\phi})^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} \quad \text{(Б.11)} \\ &= \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}, \quad \text{(Б.12)}$$

$$\langle \Phi_+^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}. \quad \text{(Б.13)}$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\begin{aligned} \langle \Phi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{e^{-i\phi}}{(\sqrt{2})^2} \right\} \quad \text{(Б.14)} \\ &= \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \quad \text{(Б.15)}$$

$$\langle \Phi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}. \quad \text{(Б.16)}$$

Б.2 КШ-

Пусть мы имеем другое перепутанное состояние КШ- тоже типа "Кота Шредингера", отличающееся от (Б.1) только знаком:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B\rangle \quad \text{(Б.17)}$$

Очевидно, что для измерений z-компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{(Б.18)}$$

$$\langle z_-^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \text{(Б.19)}$$

$$\langle z_+^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0. \quad \text{(Б.20)}$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x-проекцию спина я получу в результате либо (++) , либо (--) , либо (+-) , либо (-+) ?

Используя таблицу (А.1), получаю

$$\begin{aligned} \langle \chi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle \chi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad \text{(Б.21)}$$

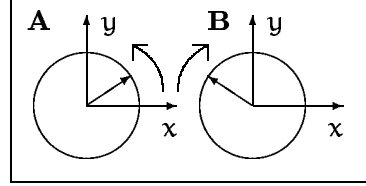
$$\begin{aligned} \langle \chi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle \chi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \text{(Б.22)}$$

Аналогично для y-компоненты:

$$\begin{aligned} \langle y_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(i)^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle y_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad \text{(Б.23)}$$

$$\begin{aligned} \langle y_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{|i|^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle y_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad \text{(Б.24)}$$

Эти результаты могут быть качественно описаны следующей фазовой диаграммой:



Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\langle \chi_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{-i}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \chi_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \quad \text{(Б.25)}$$

$$\langle \chi_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}, \quad \text{(Б.26)}$$

$$\langle \chi_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}. \quad \text{(Б.27)}$$

Важно, что при измерении x-проекции спина вероятность получить результат (+-) или (-+) равна нулю а вероятности результатов (++) или (--) равны 1/2 каждая для состояния шредингеровского кота (Б.1). Наоборот, для другого состояния шредингеровского кота (Б.17) вероятность получить результат (++) или (--) равна нулю, а вероятности результатов (+-) или (-+) равны 1/2 каждая. Это является чисто квантовым эффектом, связанным с перепутыванием. С точки зрения классической теории очевидно, что вероятности получить при измерении x-проекции результа-

ты $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$ равновероятны для обоих состояний (Б.1) и (Б.17).

Б.2.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\langle \Phi_+^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.28})$$

$$\langle \Phi_+^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{Б.29})$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\langle \Phi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{e^{-i\phi}}{(\sqrt{2})^2} \right\} \quad (\text{Б.30})$$

$$= \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.31})$$

$$\langle \Phi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{Б.32})$$

Б.3 Состояние ЕПР+

Пусть мы имеем перепутанное состояние ЕПР+ типа "Einstein-Podolsky-Rosen":

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_-^B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_+^B\rangle \quad (\text{Б.33})$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{Б.34})$$

$$\langle z_+^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{Б.35})$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x -проекцию спина я получу в результате либо $(++)$, либо $(--)$, либо $(+-)$, либо $(-+)$?

Используя таблицу (А.1), получаю

$$\langle \chi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \chi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \chi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0,$$

$$\langle \chi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0 \quad (\text{Б.36})$$

Аналогично для y -компоненты:

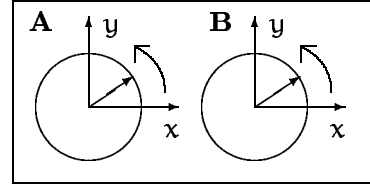
$$\langle y_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.37})$$

$$\langle y_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.38})$$

$$\langle y_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{Б.39})$$

$$\langle y_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{Б.40})$$

Эти результаты могут быть качественно описаны следующей фазовой диаграммой:



Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\langle \chi_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.41})$$

$$\langle \chi_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 + i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.42})$$

$$\langle \chi_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.43})$$

$$\langle \chi_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 - i}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{Б.44})$$

Б.3.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\langle \Phi_+^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.45})$$

$$\langle \Phi_+^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0,$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{Б.46})$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{+}^A \chi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_{-}^A \chi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{-1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\quad (\text{Б.47})$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{+}^A \chi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{-1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_{-}^A \chi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (\text{Б.48})$$

Б.4 Состояние ЕПР–

Пусть мы имеем перепутанное состояние ЕПР–, отличающееся от (Б.33) только знаком:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_{+}^A z_{-}^B\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_{-}^A z_{+}^B\rangle \quad (\text{Б.49})$$

Очевидно, что для измерений z-компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_{+}^A z_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_{-}^A z_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{Б.50})$$

$$\langle z_{+}^A z_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.51})$$

$$\langle z_{-}^A z_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{Б.52})$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x-проекцию спина я получу в результате либо (++) , либо (--) , либо (+-) , либо (-+) ?

Используя таблицу (А.1), получаю

$$\begin{aligned}\langle \chi_{+}^A \chi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle \chi_{-}^A \chi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0\end{aligned}\quad (\text{Б.53})$$

$$\langle \chi_{+}^A \chi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \chi_{-}^A \chi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Б.54})$$

Аналогично для y-компоненты:

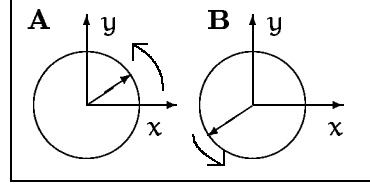
$$\langle y_{+}^A y_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{Б.55})$$

$$\langle y_{-}^A y_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{Б.56})$$

$$\langle y_{+}^A y_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.57})$$

$$\langle y_{-}^A y_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}. \quad (\text{Б.58})$$

Эти результаты могут быть качественно описаны следующей фазовой диаграммой:



Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\langle \chi_{+}^A y_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 - i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.59})$$

$$\langle \chi_{-}^A y_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + i}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \chi_{+}^A y_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 + i}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \chi_{-}^A y_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - i}{2\sqrt{2}}.$$

Опять, как и для состояний типа предингеровских котов, для состояний типа ЕПР при измерении x-проекции спина вероятность получить результат (+-) или (-+) равна нулю а вероятности результатов (++) или (--) равны 1/2 каждая для ЕПР+ состояния (Б.33). Наоборот, для другого ЕПР– состояния (Б.49) вероятность получить результат (++) или (--) равна нулю, а вероятности результатов (+-) или (-+) равны 1/2 каждая. Это является чисто *квантовым эффектом*, связанным с перепутыванием. С точки зрения классической теории очевидно, что вероятности получить при измерении x-проекции результаты (++) , (--) , (+-) и (-+) равновероятны для обоих состояний (Б.33) и (Б.49).

Б.4.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{+}^A \Phi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0, \\ \langle \Phi_{-}^A \Phi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0,\end{aligned}\quad (\text{Б.60})$$

$$\langle \Phi_{+}^A \Phi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-e^{-i\phi}}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_{-}^A \Phi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{Б.61})$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{+x_+}^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_{-x_-}^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{-1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{+x_+}^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{-1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_{-x_-}^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (\text{B.63})$$

В Примеры: 3 частицы

Рассмотрим примеры перепутанных состояний (entangled states) трех частиц A, B, C и рассчитаем для них амплитуды вероятностей результатов измерений различных парных компонент спинов.

В.1 GHZ+

Пусть мы имеем состояние GHZ+ (Greenberg-Horne-Zeulinger) (это похоже на "тройного кота Шредингера"), упомянутое в [1] (гл. 3):

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle \quad (\text{B.1})$$

Очевидно, что для измерений z-компоненты спинов трех частиц имеем

$$\begin{aligned}\langle z_+^A z_+^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_-^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_+^A z_+^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_+^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0, \\ \langle z_+^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_-^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x-проекцию спина у всех трех частиц я получу в результате либо (+++), либо (++-), либо (+-+), либо (+--)? Это соответствует комбинации детекторов T₁ в [1].

Используя таблицу (A.1), получаю

$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_+^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A x_+^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A x_-^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0, \\ \langle x_+^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Это совпадает с результатами, приведенными в [1] без доказательства.

Однако амплитуды вероятности измерения x-проекций вида (---), либо (-+-), либо (-+-), либо (-++) прямо противоположны:

$$\begin{aligned}\langle x_-^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A x_+^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A x_-^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A x_+^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{(-1)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0.\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Теперь считаем амплитуды вероятностей, соответствующие конфигурации детекторов T₂ в [1]. Используя таблицу (A.1), получаю первую серию (x₊^A):

$$\begin{aligned}\langle x_+^A y_+^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{(-i)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A y_-^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Аналогично для второй серии (x₋^A):

$$\begin{aligned}\langle x_-^A y_+^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A y_-^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A y_-^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

В.2 GHZ-

Пусть мы имеем состояние GHZ-, отличающееся от (B.1) только знаком:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle \quad (\text{B.3})$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов трех частиц имеем

$$\begin{aligned}\langle z_+^A z_+^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_-^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_+^A z_+^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_+^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0, \\ \langle z_+^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_-^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Используя таблицу (A.1), получаю для комбинации детекторов T_1 в [1] с x_+^A :

$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_+^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A x_+^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A x_-^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0\end{aligned}$$

Амплитуды вероятности измерения x -проекции вида $(- - -)$, либо $(- + -)$, либо $(+ + -)$, либо $(- + +)$ прямо противоположны:

$$\begin{aligned}\langle x_-^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A x_+^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A x_-^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0, \\ \langle x_-^A x_+^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(-1)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Теперь посчитаем амплитуды вероятностей, соответствующие конфигурации детекторов T_2 в [1]. Используя таблицу (A.1), получаю первую серию (x_+^A):

$$\begin{aligned}\langle x_+^A y_+^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A y_-^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(-i)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A y_-^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Аналогично для второй серии (x_-^A):

$$\begin{aligned}\langle x_-^A y_+^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A y_-^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0, \\ \langle x_-^A y_-^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Г Обозначения

δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

Ссылки

- [1] G. J. Milburn, *The Feynman Processor*, Perseus book, 1998.
- [2] К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность* — Москва-Ижевск, 2001, гл. 1.
- [3] Л. Д. Ландау . Е. М. Лифшиц. *Теоретическая физика*, т. V. *Статистическая физика*, часть 1 — Москва: Наука, 1976, стр. 580-600.
- [4] К. Шеннон, *Работы по теории информации и кибернетике*, пер. с англ. — Москва: ИЛ, 1963.
- [5] Л. Бриллюэн, *Наука и информация*, пер. с англ.. — Москва: Физматгиз, 1960, стр. 392.
- [6] И. Фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Москва: Наука, 1974, стр. 752.
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Rhys. Rev* **47**, 777 (1935).
- [8] Д. Бом, *Квантовая теория*, Физматгиз, 1961,
- [9] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [10] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [11] А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, *УФН* **163**, №8, 1 (1993).
- [12] R. Cleve, A. Ekkert, C. Macchiavello, M Mosca, [quant-ph/9708016](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9708016), 8 aug 1997.
- [13] Э. Стин, *Квантовые вычисления*, Москва-Ижевск, 2000.